

This question paper contains 16+4 printed pages]

Your Roll No.....

7067

B.A. (Hons.)/I

D

ECONOMICS—Paper 02

(Mathematical Methods for Economics)

(Admissions of 2005 and onwards)

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 38

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

Note :— Answers may be written either in English or in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए ।

Simple calculator is allowed.

There are five questions in all.

All questions are compulsory.

P.T.O.

केवल साधारण कैल्कुलेटर ही प्रयोग कर

सकते हैं। कुल पाँच प्रश्न हैं।

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

1. (a) Consider the following model :

$$Y = C + \bar{I} + \bar{G}$$

$$C = a + bY \quad a > 0, 0 < b < 1$$

where  $Y$  and  $C$  are the endogenous variables and  $\bar{I}$  and  $\bar{G}$  are exogenously given :

- (i) Interpret the parameters “ $a$ ” and “ $b$ ”.
- (ii) Find the equilibrium levels  $Y^*$  and  $C^*$ . State any further restriction(s) that must be placed on the parameters for a solution to exist ?

4

निम्नलिखित मॉडल पर विचार कीजिए :

$$Y = C + \bar{I} + \bar{G}$$

$$C = a + bY \quad a > 0, 0 < b < 1$$

जहाँ  $Y$  तथा  $C$  अंतर्जात चर तथा  $\bar{Y}$  तथा  $\bar{C}$  बहिर्जनित हैं :

- (i) पैरामीटर्स "a" तथा "b" की व्याख्या कीजिए।
- (ii) सन्तुलन स्तर  $Y^*$  तथा  $C^*$  ज्ञात कीजिये। हल विद्यमान होने के लिये पैरामीटर्स पर कोई और प्रतिबंध है तो बताइये।

- (b) Test the following series for convergence : 2

$$\sum_{n \geq 0} \frac{4^{2n-1}}{3^{3n+1}}$$

निम्नलिखित श्रेणी की अभिसारिता ज्ञात कीजिये :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{4^{2n-1}}{3^{3n+1}}$$

Or

(अथवा)

- (a) Sketch the set of points that satisfy the following equation : 4

$$|x| = |y|.$$

निम्नलिखित समीकरण को संतुष्ट करने वाले सभी बिंदुओं के समुच्चय का अनुरेखण कीजिये :

$$|x| = |y|$$

(b) Evaluate the following limits, if they exist :

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 1}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

2

निम्नलिखित सीमाएँ निकालिये (यदि विद्यमान हैं) :

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 1}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

2. (a) Consider an economy divided into two sectors—the agricultural sector (A) and the industrial sector (I). Industry A uses 0.2 units of its own product and 0.3 units from

I to produce one unit in sector A. Industry I uses 0.4 units from A and 0.1 units of its own product to produce one unit in I. Suppose final demands in A and I are 120 units and 90 units respectively.

- (i) Write down the Leontief system for this economy.
- (ii) Find the number of units that has to be produced in each sector in order to meet the final demands.

4

दो क्षेत्रों कृषि क्षेत्र (A) तथा औद्योगिक क्षेत्र (I) वाली अर्थव्यवस्था पर विचार कीजिए। उद्योग A अपने उत्पाद की 0.2 इकाइयाँ तथा I से 0.3 इकाइयाँ A में एक इकाई उत्पादन के लिए प्रयोग करता है। उद्योग I अपने उत्पाद की 0.1 इकाइयाँ तथा I से 0.4 इकाइयाँ I में एक इकाई

उत्पादन के लिए प्रयोग करता है। माना कि A तथा I की अंतिम माँग 120 तथा 90 इकाइयाँ क्रमशः हैं।

(i) इस अर्थव्यवस्था के लिए लिओनटिफ प्रणाली लिखिये।

(ii) अंतिम माँग को संतुष्ट करने के लिए हर क्षेत्र में कितनी इकाइयों का उत्पादन होना चाहिये ?

(b) Let :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determine if the set of vectors  $v_1, v_2, v_3$  is linearly independent.

(ii) If the vectors are linearly dependent, find the pattern of dependence between them.

मान लीजिये :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (i) निर्धारित कीजिये यदि सदिश समूह  $v_1, v_2, v_3$  रैखिक स्वतंत्र है।
- (ii) यदि सदिश रैखिक निर्भर है तो उनके बीच निर्भरता का प्रतिरूप ज्ञात कीजिये।

Or

(अथवा)

- (a) Does the following system of equations have a solution ?

If yes, determine the number of degrees of freedom and

find all the solutions.

4

$$-4x + 6y + 4z = 4$$

$$2x - y + z = 1.$$

P.T.O.

क्या निम्नलिखित समीकरण निकाय का हल है ? यदि हाँ, तो स्वतंत्रता की कोटि की संख्या निर्धारित कीजिये तथा सब हल ज्ञात कीजिये।

$$-4x + 6y + 4z = 4$$

$$2x - y + z = 1.$$

- (b) Find the equation for the line that passes through point  $(2, 1, 3)$  and has the same direction as  $(4, -2, 5)$ . Where does it meet the  $x_1x_2$  plane ? 4

रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये जो बिन्दु  $(2, 1, 3)$  से पारित करती है तथा  $(4, -2, 5)$  की दिशा में है। यह समतल  $x_1x_2$  को कहाँ काटती है ?



3. (a) Let

$$f(x) = -\sqrt{x-3}, \quad x \geq 3.$$

Find the inverse of  $f$ , and determine the domain of the inverse function. 3

मान लीजिये :

$$f(x) = -\sqrt{x-3}, \quad x \geq 3$$

$f$  का प्रतिलोम ज्ञात कीजिये तथा प्रतिलोम फलन का प्रांत ज्ञात कीजिये।

(b) Find the vertical asymptotes for the following functions :

$$(i) \quad f(x) = \frac{2}{x^2 + 9}$$

$$(ii) \quad g(x) = \frac{2x + 3}{x + 4}$$

2

निम्नलिखित फलनों का ऊर्ध्वाधर अनंतस्पर्शी ज्ञात

कीजिये :

$$(i) \quad f(x) = \frac{2}{x^2 + 9}$$

$$(ii) \quad g(x) = \frac{2x + 3}{x + 4}$$

(c) Find all the extreme points of the function  $f(x) = (x - 1)^2$

over the interval  $[0, 3]$ . Classify the extreme points as local

and/or global.

3

फलन  $f(x) = (x - 1)^2$  के अंतराल  $[0, 3]$  में सभी चरम बिन्दु

ज्ञात कीजिये। चरम बिंदुओं का स्थानीय तथा/अथवा व्यापक

वर्गीकरण कीजिये।

Or:

(अथवा)

- (a) Find the first-order and second-order Taylor approximations for the following function about  $x = 0$  :

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 9$$

Find the error in each case and comment on its size. 3

निम्नलिखित फलन का प्रथम तथा द्वितीय श्रेणी टेलर सन्निकटन  $x = 0$  पर ज्ञात कीजिये :

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 9$$

प्रत्येक के संदर्भ में त्रुटि ज्ञात कीजिये और उसके माप पर टिप्पणी कीजिये।

- (b) Show that the equation  $x^4 + 2x - 2 = 0$  has exactly one solution in  $(0, 1)$ . 2

दर्शाइये कि समीकरण  $x^4 + 2x - 2 = 0$  का अंतराल  $(0, 1)$  में केवल एक ही हल है।

- (c) Find the intervals on which the function  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$  is strictly increasing and strictly decreasing. 3

अंतराल ज्ञात कीजिए जहाँ फलन  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$  सख्ती से बढ़ रहा है तथा सख्ती से घट रहा है।

4. (a) Test the homogeneity of the function :

$$f(x, y) = 2 \ln x + \ln y, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Is the function homothetic ?

फलन :

$$f(x, y) = 2 \ln x + \ln y, \quad x > 0, \quad y > 0$$

की समघातता की जाँच कीजिये। क्या फलन समस्थित है ?

- (b) Compute the first-order directional derivative of the function :

$$f(x, y) = \frac{100x + 2xy - 3y^2}{100}$$

at the point (100, 100) in the direction  $(-4, 2)$ . 3

फलन :

$$f(x, y) = \frac{100x + 2xy - 3y^2}{100}$$

का प्रथम श्रेणी द्विक अवकलज बिन्दु (100, 100) पर  $(-4, 2)$  की दिशा में ज्ञात कीजिये।

(c) Show graphically the region represented by the set :

$$\{(x, y) : xy > 1, x > 0, y > 0\}$$

Is the set convex ?

2

ग्राफ की सहायता से समुच्चय :

$$\{(x, y) : xy > 1, x > 0, y > 0\}$$

प्रदर्शित कीजिये। क्या यह समुच्चय उत्तल है ?

Or

(अथवा)

(a) Suppose that the following system of equations defines

$x$  and  $y$  as differentiable functions of " $t$ ".

$$y = t^2 + x$$

$$x = y^2 + t.$$

Find :

$$\frac{dy}{dt} \text{ and } \frac{dx}{dt} \quad 4$$

माना कि निम्नलिखित समीकरण निकाय  $x$  तथा  $y$  को  
 "t" के अवकलनीय फलन के रूप में निश्चित करते  
 हैं :

$$y = t^2 + x$$

$$x = y^2 + t$$

ज्ञात कीजिये :

$$\frac{dy}{dt} \text{ तथा } \frac{dx}{dt}$$

(b) The demand function for commodity A is given by :

$$x_A = k p_A^{a_1} p_B^{a_2}, \quad (k, p_A, p_B > 0, a_1, a_2 \text{ are constants})$$

$p_A$  and  $p_B$  represent the prices of goods A and B,

respectively. Calculate the partial elasticities of demand for good A with respect to  $p_A$  and  $p_B$ . What are the expected signs of  $a_1$  and  $a_2$  (assume that A and B are substitutes) ?

4

वस्तु A का माँग फलन है :

$$x_A = k p_A^{a_1} p_B^{a_2}, \quad (k, p_A, p_B > 0, a_1, a_2 \text{ अचल हैं})$$

$p_A$  तथा  $p_B$  वस्तु A तथा B, की क्रमशः कीमत दर्शाते हैं।

$p_A$  तथा  $p_B$  के संबंध में वस्तु A की माँग की आंशिक लोच निकालिये।  $a_1$  तथा  $a_2$  के अपेक्षित चिह्न क्या हैं

(माना कि A तथा B स्थानापन्न वस्तुएँ हैं) ?

5. (a) Find all the stationary point(s) of the following function :

$$f(x, y) = \frac{4}{3}x^3 + y^2 - 4x + 8y.$$



Classify the stationary point(s) as local maximum, local minimum or saddle point(s). 3

निम्नलिखित फलन के सभी स्तब्ध बिन्दु ज्ञात कीजिये :

$$f(x, y) = \frac{4}{3}x^3 + y^2 - 4x + 8y$$

स्तब्ध बिन्दुओं का वर्गीकरण स्थानीय अधिकतम, स्थानीय न्यूनतम अथवा काठी बिन्दु में कीजिये।

(b) Solve (using the Lagrangian method) the problem :

$$\text{Min}_{x,y} f(x, y) = x + y$$

subject to  $g(x, y) = x^2 - y = 1$ .

Explain the problem geometrically by drawing appropriate

level curves for  $f(x, y)$  together with the graph of the

parabola  $x^2 - y = 1$ . 5

$x$  तथा  $y$  के संबंध में  $g(x, y) = x^2 - y = -1$  के अध्याधीन  $f(x, y) = x + y$  का (लाग्रांज प्रणाली द्वारा) न्यूनतम ज्ञात कीजिये।  $f(x, y)$  की उचित स्तर वक्रों तथा पैराबोला  $x^2 - y = -1$  के ग्राफ की सहायता से ज्यामिति द्वारा व्याख्या कीजिए।

Or

(अथवा)

(a) Let utility for two goods  $x$  and  $y$  be given by :

$$U(x, y) = Ax^\alpha y^\beta, A > 0$$

Assume that utility is everywhere increasing in these two goods. For what values of  $\alpha$  and  $\beta$  is this function concave ?

दो वस्तु  $x$  तथा  $y$  का उपयोगिता फलन है :

$$U(x, y) = Ax^\alpha y^\beta, A > 0$$

माना कि उपयोगिता वस्तु  $x$  तथा  $y$  में निरंतर बढ़ रही है।  $\alpha$  तथा  $\beta$  पर किन प्रतिबंधों के अधीन यह फलन अवतल है ?

- (b) A firm uses inputs  $L$  and  $K$  to produce a single output  $Q$  according to the production function  $Q = LK$ . The prices per unit of  $L$  and  $K$  are  $w$  and  $r$ , respectively. Solve the problem :

$$\text{Min}_{L, K} wL + rK \text{ subject to } LK = Q$$

Find the cost minimizing inputs  $L^*$  and  $K^*$ .

5

एक फर्म उत्पादन फलन  $Q = LK$  के अनुसार एक मात्र निर्गत  $Q$  के लिए  $L$  तथा  $K$  निवेशों का उपयोग करती है।  $L$  तथा  $K$  की कीमतें क्रमशः  $w$  तथा  $r$  हैं।  $Q = LK$  के अध्याधीन  $C = wL + rK$  को न्यूनतम करने वाले निवेश  $L^*$  तथा  $K^*$  ज्ञात कीजिये।