This question paper contains 8+3 printed pages]

Your Roll No ....

2002

B.A.(Hons.)/I **E**

ECONOMICS—Paper 02

(Mathematical Methods for Economics)

(Admissions of 2005 and onwards)

Time : 2 Hours *Maximum Marks* : 38

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

Note :— Answers may be written *either* in English *or* in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी :—इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी **या** हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए ।

Attempt *All* questions.

Choice is available within each question.

सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

हर प्रश्न में विकल्प मौजूद है।

P.T.O.

1. (*a*) Show graphically the region represented by the set $S = \{(x, y) \mid y \leq 4 - x^2\}$. Is the set S convex ?

(*b*) Find all values of x that satisfy the inequality $|x - 3| \leq 4$.

(*c*) Identify the largest set of linearly independent vectors from the following :

(1, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 1, 1) and (0, 0, 1).

Is this set unique (2,2,4)

(क) समुच्चय $S = \{(x, y) \mid y \leq 4 - x^2\}$ द्वारा वर्णित क्षेत्र को ग्राफ में दर्शाइए। क्या समुच्चय S उत्तल है ?

(ख) x के वे सभी मान ज्ञात कीजिए जोकि असमिका $|x - 3| \leq 4$ को संतुष्ट करते हैं।

(ग) दिए गए सदिशों (1, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 1, 1) और (0, 0, 1) में से रेखीय रूप से स्वतंत्र सदिशों का सबसे बड़ा समुच्चय ज्ञात कीजिए। क्या यह समुच्चय अद्वितीय है ?

Or

(अथवा)

(*a*) Graph the following function :

$$y = |x| + 5.$$

(*b*) Find the domain and range of the function

$$F(x) = \sqrt{x-2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}.$$

(*c*) Find the value of '*a*' for which the set of vectors S is linearly dependent :

S = {(2, 4, 6), (1, 5, 8), (2, *a*, 2)}. (2,2,4)

(क) फलन $y = |x| + 5$ का ग्राफ बनाइये।

(ख) फलन $F(x) = \sqrt{x-2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$ की परास (domain) और परिसर (range) ज्ञात कीजिए।

(ग) 'a' का वह मान ज्ञात कीजिए जिससे सदिशों का समुच्चय $S = \{(2, 4, 6), (1, 5, 8), (2, a, 2)\}$ रेखीय रूप से स्वतंत्र हो।

2. (*a*) Determine the values of λ for which the following system of equations can possess a non-trivial solution :

$$2x - 3y + z = \lambda x$$

$$2x - 3y + 2z = \lambda y$$

$$-x + 2y = \lambda z.$$

(*b*) Examine the continuity of the following function at $x = 2$:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}, & x \neq 2 \\ 1 \quad , & x = 2 \end{cases} \qquad (5,3)$$

(क) λ के वे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए निम्नलिखित समीकरण निकाय का अतुच्छ (non-trivial) हल हो सकता है :

$$2x - 3y + z = \lambda x$$

$$2x - 3y + 2z = \lambda y$$

$$-x + 2y = \lambda z.$$

(ख) निम्नलिखित फलन के सांतत्य की $x = 2$ पर जाँच कीजिए :

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

Or

(अथवा)

(*a*) Find the values of '*a*' and '*b*' such that the following system of equations has a unique solution :

$$3x - 2y + z = 6$$

$$5x - 8y + az = 3$$

$$2x + y + az = -b$$

(*b*) Find the value of $\hat{a}$ for which the following function is continuous for all x :

$$F(x) = \begin{cases} 3ax + 1, & x < 4 \\ x^2 - 9, & x \geq 4 \end{cases}$$ (5,3)

(क) 'a' और 'b' के वह मान ज्ञात कीजिए जिनसे निम्नलिखित समीकरण-निकाय का अद्वितीय हल हो :

$$3x - 2y + z = 6$$

$$5x - 8y + az = 3$$

$$2x + y + az = -b$$

(*b*) a के वे मान ज्ञात कीजिए जिससे x के सभी मूल्यों के लिए निम्नलिखित फलन संतत हो :

$$F(x) = \begin{cases} 3ax + 1, & x < 4 \\ x^2 - 9, & x \geq 4 \end{cases}$$

3. (*a*) Find all extreme/inflexional points of the function $F(x) = x^4 - 6x^2 + 1$.

(*b*) Show that the equation $f(x) = 2x^3 + 6x + 5 = 0$ has at least one real root. By examining the sign of $f'(x)$ show that the function has exactly one real root. (4,4)

(क) फलन $F(x) = x^4 - 6x^2 + 1$ के सभी चरम (extreme)/ मोड़दार (inflexional) बिन्दु ज्ञात कीजिए।

(ख) दर्शाइये कि समीकरण $f(x) = 2x^3 + 6x + 5 = 0$ का कम-से-कम एक वास्तविक मूल है। $f'(x)$ के चिह्न के परीक्षण से दर्शाइये कि इस फलन का केवल एक वास्तविक मूल है।

Or

(अथवा)

(*a*) Find the extreme/inflexional points (if any) for the function

$$F(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

(*b*) Test for convergence the series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(1+a)^n}{(1+b)^{n+1}}$ where A, a and b are positive constants. (4,4)

(क) फलन $F(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ के चरम (extreme)/मोड़दार (inflexional) बिन्दु ज्ञात कीजिए (अगर वह विद्यमान है)।

(ख) शृंखला $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A(1+a)^n}{(1+b)^{n+1}}$ का अभिसरण (convergence) के लिए परीक्षण कीज़िए जहाँ A, a और b धनात्मक स्थिरांक हैं।

4. (*a*) Show that $x^2 + y^2 = 9$ is a level curve for the function

$$F(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} + 10$$

Hence comment on the shape of all level curves.

(*b*) Find the degree of homogeneity (if any) of the following three functions and check if they are homothetic :

$$F(x, y) = e^{x^3 + xy^2},$$

$$G(x, y) = e^{\ln(x^3 + xy^2)},$$

$$H(x, y) = x^3 + xy^2.$$

(4,4)

(क) दर्शाइये कि $x^2 + y^2 = 9$ फलन

$$F(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} + 10$$

का एक स्तर वक्र (level curve) है। इससे इस फलन के सभी स्तर वक्रों की आकृतियों पर टिप्पणी कीजिए।

(ख) निम्नलिखित तीन फलनों की समघातता की कोटियाँ (degree of homogeneity) ज्ञात कीजिए और परीक्षण कीजिए कि क्या ये फलन होमोथेटिक (homothetic) हैं।

$$F(x, y) = e^{x^3 + xy^2},$$

$$G(x, y) = e^{\ln(x^3 + xy^2)},$$

$$H(x, y) = x^3 + xy^2.$$

Or

(अथवा)

(*a*) Find the extreme values of the function $F(x, y) = xy$ subject to $0 \le x \le 5$ and $0 \le y \le 3$.

(*b*) Examine the concavity/convexity of the function $F(x, y) = 100x^{0.5}y^{0.3}$. (4,4)

(क) $0 \le x \le 5$ और $0 \le y \le 3$ के अधीन फलन $F(x, y) = xy$ के चरम मान ज्ञात कीजिए।

(ख) फलन $F(x, y) = 100x^{0.5}y^{0.3}$ की उत्तलता (convexity)/ अवतलता (concavity) का परीक्षण कीजिए।

5. A consumer purchases quantities x and y of two goods whose prices are p_x and p_y respectively. The consumer's income is M and his utility function is $U(x, y) = x^a y^b$. Find the demand functions for the two goods.

एक उपभोक्ता दो वस्तुओं जिनकी कीमतें क्रमशः p_x और p_y हैं की मात्राएँ x और y खरीदता है। उपभोक्ता की आय M है और उसका उपयोगिता फलन $U(x, y) = x^a y^b$ है। दोनों वस्तुओं का माँग फलन ज्ञात कीजिए।

Or

(अथवा)

Use the method of Lagrange multiplier to find the minimum value of the function $F(x, y) = x^2 + y^2$ subject to the constraint $3x + 4y = 25$. 6

लाग्रान्जे गुणक विधि द्वारा प्रतिबंध $3x + 4y = 25$ के अधीन फलन $F(x, y) = x^2 + y^2$ का न्यूनतम मूल्य ज्ञात कीजिए।