

This question paper contains 8 printed pages.

Your Roll No.

Sl. No. of Ques. Paper : 6502 FC
Unique Paper Code : 12271102
Name of Paper : Mathematical Methods for Economics – I
Name of Course : B.A. (Hons.) Economics
Semester : I
Duration : 3 hours
Maximum Marks : 75

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

(इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिये गये निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिये।)

NOTE:— Answers may be written either in English or in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी:— इस प्रश्नपत्र का उत्तर अंग्रेज़ी या हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

There are six questions in all.
All questions are compulsory.
A simple calculator can be used.

कुल छः प्रश्न हैं।

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

साधारण कैलक्यूलेटर का उपयोग किया जा सकता है।

All parts of a question should be answered together.
प्रत्येक प्रश्न के सभी भागों को एक ही स्थान पर हल कीजिए।

P. T. O.

1. Answer any **two** of the following:

2×4 = 8

(a) Find the solution / solution set for the following:

- i. $|x^2 + 6x + 16| < 8$
- ii. $\log_3(x + 6) + \log_3(x - 2) = 2$

(b) Does any of the following drawn on a rectangular coordinate plane represent a function $y = f(x)$? Why or why not?

- i. $y^2 = 3x$
- ii. $y = \frac{1}{|x|}$
- iii. a vertical straight line

Substantiate your answer with the help of a graph in each case.

(c) For each of the following propositions P and Q, state whether P is a necessary condition, or a sufficient condition, or both necessary and sufficient for Q to be true?

- i. P: Ali's vehicle has four wheels.
Q: Ali has a car.
- ii. P: The series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent
Q: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- iii. P: $x = (-8)^{1/3}$, $x \in \mathbb{R}$
Q: $x = -2$
- iv. P: a number n is odd
Q: n is a prime number strictly greater than 2.

निम्नलिखित में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिये :

2 × 4 = 8

(क) निम्नलिखित के लिए हल / समुच्चय हल ज्ञात कीजिये:

- i. $|x^2 + 6x + 16| < 8$
- ii. $\log_3(x + 6) + \log_3(x - 2) = 2$

(ख) आयताकार समन्वय समतल (rectangular coordinate plane) में बनें निम्नलिखित संबंधों में कौन से

फलन हैं? क्यों या क्यों नहीं ?

- i. $y^2 = 3x$
- ii. $y = \frac{1}{|x|}$
- iii. एक ऊर्ध्व (vertical) सीधी रेखा

प्रत्येक दशा में अपने उत्तर को रेखाचित्र द्वारा सिद्ध कीजिये।

(ग) निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिये लिखें, यदि प्रस्ताव Q के सत्य होने के लिये प्रस्ताव P एक आवश्यक शर्त

है या पर्याप्त शर्त है या दोनों है :

- i. P: अली के वाहन के चार पहिये हैं।
Q: अली के पास एक कार है।
- ii. P: श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ संसृत है।
Q: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- iii. P: $x = (-8)^{1/3}$, $x \in \mathbb{R}$
Q: $x = -2$
- iv. P: n एक विषम अंक है।
Q: n , दो से बड़ा एक अभाज्य अंक है।

2. Answer any **four** of the following:

4×4=16

- (a) Draw the graph of $y = \sqrt{x+5} - 4$ using the graph of $y = \sqrt{x}$.
- (b) Is there a solution to the equation $x^3 + 2x - 2 = 0$. Is the solution unique?
- (c) A function is given as $f(x) = 5 + e^{-x^2}$,
 - i. Find its domain and range.
 - ii. Find its horizontal asymptote(s), if any.

(d) Find the integer roots of the following equation:

$$3x^4 - 12x^3 - x^2 + 4x = 0$$

(e) Test the following for convergence:

- i. The sequence $s_n = \frac{n^2-1}{n^2-n}$
- ii. The series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2)^{1/n}$

निम्नलिखित में से किन्हीं चार के उत्तर दीजिये :

4×4=16

(क) ग्राफ $y = \sqrt{x}$ की सहायता से ग्राफ $y = \sqrt{x+5} - 4$ का अनुरेखण कीजिये।

(ख) क्या समीकरण $x^3 + 2x - 2 = 0$ का समाधान है? क्या समाधान अद्वितीय है?

(ग) फलन $f(x) = 5 + e^{-x^2}$ के लिये:

- फलन का परास (domain) एवं परिसर (range) ज्ञात कीजिये।
- फलन के क्षैतिज अनंतस्पर्शी (यदि यह अस्तित्व रखते हैं) ज्ञात कीजिये।

(घ) समीकरण $3x^4 - 12x^3 - x^2 + 4x = 0$ के पूर्णांक मूलों को ज्ञात कीजिये।

(ङ) अभिसरण (convergence) की जाँच कीजिये:

- अनुक्रम $S_n = \frac{n^2-1}{n^2-n}$
- श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2)^{1/n}$

3. Answer any **three** of the following:

3×5 = 15

(a) Find the following limits:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{3x} - a^{2x} - a^x + 1}{2x^2}$

(b) The equation of the demand curve is given as:

$$D(P) = \frac{A}{p^B}$$

where, A and B are positive constants and P is the price.

- Find the price elasticity of demand.
 - Find elasticity of $T(P)$ with respect to price where $T(P) = P \cdot D(P)$
- (c) The line $2x - y + 1 = 0$ is tangent to a circle at $(2, 5)$. Moreover, the centre of the circle is on the line $x + y = 9$. Find the equation of the circle.
- (d) Find the linear approximation of the function $f(x) = \sqrt{1-x}$ around $x = 0$ and use it to obtain an estimate of $\sqrt{0.95}$. Also find an upper limit for the error of approximation.

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिये :

3×5 = 15

(क) निम्नलिखित की सीमा ज्ञात कीजिये:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{3x} - a^{2x} - a^x + 1}{2x^2}$

(ख) माँग फलन $D(P) = \frac{A}{p^B}$ से दिया गया है, जहाँ A एवं B धनात्मक स्थिरांक हैं तथा p कीमत है।

- माँग की कीमत लोच ज्ञात कीजिये।
- कीमत के सापेक्ष, $T(P)$ की कीमत लोच ज्ञात कीजिये जहाँ $T(P) = P \cdot D(P)$

- (ग) एक रेखा $2x - y + 1 = 0$ एक वृत्त को बिंदु $(2, 5)$ पर स्पर्श करती है। इसके अतिरिक्त वृत्त का केन्द्र, रेखा $x + y = 9$ पर है। वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिये।
- (घ) फलन $f(x) = \sqrt{1-x}$ का $x = 0$ के आसपास रेखीय सन्निकटन ज्ञात कीजिये। इसका प्रयोग करते हुए $\sqrt{0.95}$ का अनुमानित मूल्य ज्ञात कीजिये। सन्निकटन की त्रुटि की एक ऊपरी सीमा भी ज्ञात कीजिये।

4. Answer any **three** of the following:

3×5 = 15

(a) Find all asymptotes for:

i. $y = \frac{x^3 + 5}{x^2}$

ii. $y = xe^{-2x}$

(b) Do the following functions defined by y have an inverse? Why or why not? If yes, find

$\frac{dx}{dy}$:

i. $y = -x^6 + 5; \quad x > 0$

ii. $y = 4x^5 + x^3 + 3x$

- (c) Find the intervals where $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ is increasing or decreasing.
- (d) Calculate the present value of each cash flow using a discount rate of 7% per annum.

Which one do you prefer?

Cash flow A: receive Rs.12 every year, forever, starting today.

Cash flow B: receive Rs.50 every year for five years, with the first payment being next year.

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिये :

3×5 = 15

(क) निम्नलिखित की सभी अनन्तस्पर्शी (asymptotes) ज्ञात कीजिये:

i. $y = \frac{x^3 + 5}{x^2}$

ii. $y = xe^{-2x}$

(ख) क्या निम्नलिखित फलनों का (जो y से परिभाषित हैं) प्रतिलोम फलन है? क्यों या क्यों नहीं? यदि हाँ, तो $\frac{dx}{dy}$ ज्ञात

कीजिये:

i. $y = -x^6 + 5; \quad x > 0$

ii. $y = 4x^5 + x^3 + 3x$

(ग) अंतराल ज्ञात कीजिये जहाँ फलन $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ बढ़ता है या घटता है।

(घ) डिस्काउंट दर 7% प्रति वर्ष का प्रयोग करते हुए, प्रत्येक नकदी प्रवाह के वर्तमान मूल्य की गणना कीजिये।

निम्नलिखित में से आप किसे अधिक पसंद करोगे?

नकदी प्रवाह A: आज से शुरु होते हुए, Rs.12 हर साल, हमेशा के लिये प्राप्त करते हैं

नकदी प्रवाह B: Rs.50 हर साल, पाँच साल के लिये प्राप्त करते हैं, जिसमें प्रथम भुगतान अगले वर्ष किया जाएगा।

5. Answer any **three** of the following:

3×5 = 15

- (a) Given the function $f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$, what can you say about the existence of extreme point(s) in the interval [2, 3]? Classify the extreme point(s) as local and/or global.
- (b) Find the interval(s) where the function defined by $y = (x - 3)^{\frac{2}{3}}$ is concave/convex. Use this information to find possible point(s) of inflection. Also identify possible cusp(s) in the function. Substantiate your answer with a graph.
- (c) A news item is spread by word of mouth to a potential audience of 10,000 people. After t days, $f(t) = \frac{10000}{1+50e^{-0.4t}}$ people will have heard the news.
- How many people knew about the news at $t = 0$?
 - When will the news spread at the greatest rate? (There is no need to check for the sufficient condition here. (Note: $\ln(50) \cong 4$))
 - Show that $f'(t) = 0.4f(t)\left[1 - \frac{f(t)}{10,000}\right]$. Use this formula to calculate $f'(t)$ when $f(t) = 5000$.
- (d) i. If the function $g(x)$ has a minimum at $x = x_0$, show that $f(g(x))$ also has a minimum at x_0 where $f'(g(x)) > 0$.
- Find a point on the curve $y = \sqrt{x}$ that is closest to the point (2, 0).

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिये :

3×5 = 15

(क) अंतराल [2, 3] पर फलन $f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$ के चरम बिंदुओं के अस्तित्व के विषय में आप क्या कह

सकते हैं? चरम बिंदुओं को वैश्विक/स्थानीय रूप में वर्गीकृत कीजिये।

(ख) वे अंतराल ज्ञात कीजिये जहाँ फलन $y = (x - 3)^{\frac{2}{3}}$ अवतल है और जहाँ यह फलन उत्तल है। यह

जानकारी का उपयोग करते हुए संभव नति परिवर्तन बिंदु ज्ञात कीजिये। फलन में संभव कस्प भी ज्ञात कीजिये और फलन का रेखाचित्र बनाएँ। एक ग्राफ के द्वारा अपने उत्तर की पुष्टि कीजिये।

(ग) एक समाचार एक अफवाह के द्वारा 10,000 लोगों के एक संभावित श्रोतागण तक फैला हुआ है। t दिनों

के बाद $f(t) = \frac{10000}{1+50e^{-0.4t}}$ ने यह समाचार सुना होगा।

- i. $t = 0$ पर कितने लोग इस समाचार के बारे में जानते थे ?
- ii. कब यह समाचार सबसे बड़े दर पर फैल जायेगा ? (यहाँ पर्याप्त शर्त की जाँच करने की आवश्यकता नहीं है। (नोट कीजिये $\ln(50) \cong 4$))
- iii. दर्शाइये कि $f'(t) = 0.4f(t) \left[1 - \frac{f(t)}{10,000} \right]$. इस तथ्य के उपयोग से $f'(t)$ की गणना करें जब $f(t) = 5000$ है।

- (घ) i. यदि फलन $g(x)$ का न्यूनतम $x = x_0$ पर है, तो दर्शाएँ कि फलन $f(g(x))$ का भी न्यूनतम x_0 पर है, जहाँ $f'(g(x)) > 0$ है।
- ii. वक्र $y = \sqrt{x}$ पर एक बिंदु ज्ञात कीजिये जो बिंदु $(2, 0)$ के सबसे समीप है।

6. Answer all the questions: 2×3 = 6

- (a) Sketch the region bounded by $y = x$ and $y = x^3$. Find the area of the region.

OR

Evaluate the definite integral $\int_0^4 f(x) dx$, where

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3, & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{4x}, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

- (b) Find the solution(s) of the following difference equation and determine whether the time path oscillatory/ non-oscillatory and convergent/ divergent:

$$y_t + \frac{1}{4} y_{t-1} = 5 \quad \text{where } y_0 = 2$$

OR

Suppose the demand and supply functions in the market for carrots are, respectively, given by:

$$Q_{dt} = 18 - 3P_t$$

$$Q_{st} = -3 + 4P_{t-1}$$

where Q_{dt} and Q_{st} represent the quantity demanded and quantity supplied of carrots at time t , and P_t represents the price in time period t .

Find the expression for P_t (price in time period t) in terms of P_{t-1} (price in time period $t-1$) in equilibrium. Solve the corresponding difference equation. Is the time path of price is oscillatory/ non-oscillatory and convergent/ divergent.

निम्नलिखित सभी के उत्तर दीजिये :

2×3 = 6

(क) $y = x$ एवं $y = x^3$ से घिरे क्षेत्र का रेखाचित्र बनायें। क्षेत्र के अंतर्गत क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

अथवा

निश्चित समाकलन $\int_0^4 f(x)dx$ का मूल्यांकन कीजिये, जहाँ :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3, & 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{4x}, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

(ख) निम्नलिखित अंतर समीकरण के हल ज्ञात कीजिये एवं निर्धारित कीजिये कि समयपथ दोलनकारी/

अदोलनकारी है या संसृत/ असंसृत है:

$$y_t + \frac{1}{4} y_{t-1} = 5 \quad \text{जहाँ } y_0 = 2$$

अथवा

मान लीजिये कि बाजार में गाजर के लिये मांग एवं आपूर्ति फलन क्रमशः निम्नलिखित दी गई हैं:

$$Q_{dt} = 18 - 3P_t$$

$$Q_{st} = -3 + 4P_{t-1}$$

जहाँ Q_{dt} तथा Q_{st} समय t पर क्रमशः गाजर की माँग की मात्रा तथा आपूर्ति मात्रा को दर्शाते हैं तथा P_t समय t पर गाजर की कीमत है। संतुलन में समय t की कीमत, P_t , को समय $t - 1$ की कीमत, P_{t-1} , के रूप में अभिव्यक्त कीजिये। इससे संबंधित अंतर समीकरण का हल ज्ञात कीजिये। क्या कीमत का समय पथ दोलनकारी/अदोलनकारी है या संसृत/ असंसृत है ?