

[This question paper contains 10 printed pages.]

Sr. No. of Question Paper : 5963

F

Your Roll No.....

Unique Paper Code : 227103

Name of the Paper : Mathematical Methods for Economics - I

Name of the Course : B.A. (Hons.) Economics

Semester : I

Duration: 3 Hours

Maximum Marks : 75

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. There are six questions in all.
3. All questions are compulsory.
4. A simple calculator can be used.
5. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।
2. कुल छः प्रश्न हैं।
3. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
4. साधारण कैलकुलेटर का उपयोग किया जा सकता है।
5. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

1. Answer any two of the following:

- (a) Find the solution / solution set for the following:

$$(i) \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1$$

$$(ii) -2 < \frac{6-2x}{3} < 4$$

(b) Which of these relations are functions and why?

$$(i) y = x^2$$

$$(ii) x = y^2$$

Substantiate your answer with a graph.

(c) Of the 200 candidates who were interviewed for a position at a call center, 100 had a two-wheeler, 70 had a credit card and 140 had a mobile phone. 40 of them had both a two-wheeler and a credit card, 30 had both a credit card and a mobile phone and 60 had both a two wheeler and mobile phone and 10 had all three. How many candidates had none of the three?

(2×4=8)

निम्नलिखित में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिये :

(क) x के लिए हल/समुच्चय हल निकालिये :

$$(i) \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 1$$

$$(ii) -2 < \frac{6-2x}{3} < 4$$

(ख) निम्नलिखित संबंधों में से कौन-से फलन हैं और क्यों?

$$(i) y = x^2$$

$$(ii) x = y^2$$

एक ग्राफ के द्वारा अपने उत्तर की पुष्टि कीजिये।

- (ग) एक कॉल सेंटर में एक घद के लिए 200 उम्मीदवारों का साक्षात्कार किया गया है जिनमें से 100 के पास एक दुपहिया वाहन, 70 के पास एक क्रेडिट कार्ड, 140 के पास मोबाइल फोन थे। 40 के पास दुपहिया वाहन और क्रेडिट कार्ड, दोनों थे, 30 के पास एक क्रेडिट कार्ड और एक मोबाइल फोन दोनों थे एवं 60 के पास एक दुपहिया और मोबाइल फोन दोनों थे तथा 10 के पास सभी तीन वस्तुए थी। कितने उम्मीदवारों के पास तीनों में से कुछ नहीं था?

2. Answer any four of the following:

- (a) Draw the graph of $y = 5 - (x + 3)^2$ using the graph of $y = x^2$.
- (b) At the rate of inflation of 8 percent per year, how long will it take for the price level to double? (Note : $\ln(1.08) = 0.077$; $\ln(2) = 0.693$)
- (c) Solve the following equation for x :

$$2x(2x + 10)^{-2/3} + (2x + 10)^{1/3} = 0$$

(d) Find the domain of the following functions defined by:

(i) $y = \ln(1 + x)$

(ii) $y = |x - 2|$

(e) Test the following for convergence:

(i) The sequence $s_n = (-1)^{n-1} \frac{n^2}{n^3 + 1}$

(ii) The series $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{20}{21}\right)^n$ (4×4=16)

निम्नलिखित में से किन्हीं चार के उत्तर दीजिये :

(क) ग्राफ $y = x^2$ की सहायता से ग्राफ $y = 5 - (x + 3)^2$ का अनुरेखण कीजिये।

(ख) यदि मंहगाई दर 8 प्रतिशत प्रति वर्ष है तो कीमत स्तर को दुगुना होने में कितना समय लगेगा।

(नोट कीजिये: $\ln(1.08) = 0.077$; $\ln(2) = 0.693$)

(ग) निम्नलिखित समीकरण को x के लिए हल कीजिये :

$$2x(2x + 10)^{-2/3} + (2x + 10)^{1/3} = 0$$

(घ) निम्नलिखित फलनों का परास (Domain) ज्ञात कीजिये :

(i) $y = \ln(1 + x)$

(ii) $y = |x - 2|$

(ङ) अभिसरण (convergence) की जाँच कीजिये :

(i) अनुक्रम $s_n = (-1)^{n-1} \frac{n^2}{n^3 + 1}$

(ii) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{20}{21}\right)^n$.

3. Answer any three of the following :

(a) Find the following limits :

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + x^n}{1 + x^n}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$

(b) Find the marginal product (MP) and average product (AP) from the following function (where Q is a function of L) and graph the corresponding MP and AP curves on the same graph:

$$Q = 10L + 20L^2 - 0.60L^3$$

$$\left(\text{MP} = \frac{dQ}{dL} \text{ and AP} = \frac{Q}{L}\right)$$

(c) Find $\frac{dy}{dx}$ for :

(i) $y = \log_7 7x^2$

(ii) $y = \frac{3x}{(x+2)(x+4)}$

(d) Use Newton's binomial formula to calculate the approximate value of $(1.1)^{2/3}$ for $n = 2$. Also find an upper bound for the error of approximation. (3×5=15)

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिये:

(क) सीमा ज्ञात कीजिये :

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + x^n}{1 + x^n}$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$

(ख) निम्नलिखित फलन से (जहाँ Q, L का फलन है) सीमान्त उत्पाद (MP) एवं औसत उत्पाद (AP) की गणना कीजिये तथा संबंधित MP तथा AP वक्रों का एक ही ग्राफ में अनुरेखण कीजिये:

$$Q = 10L + 20L^2 - 0.60L^3$$

$$\left(\text{MP} = \frac{dQ}{dL} \text{ and } \text{AP} = \frac{Q}{L} \right)$$

(ग) निम्नलिखित के अवकलज $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिये :

(i) $y = \log_7 7x^2$

$$(ii) y = \frac{3x}{(x+2)(x+4)}$$

(घ) न्यूटन के द्विपद सूत्र का प्रयोग करते हुए, $(1.1)^{2/3}$ का अनुमानित मूल्य ज्ञात कीजिये जहाँ $n = 2$ है। सन्निकटन की त्रुटि की एक ऊपरी सीमा भी ज्ञात कीजिये।

4. Answer any **three** of the following:

(a) Find all possible asymptotes of the following functions:

$$(i) f(x) = \ln(3x - 9)$$

$$(ii) f(x) = \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - x - 12}$$

(b) Do the following functions (where Q is a function of P) have an inverse?

Why or why not? If yes, find $\frac{dP}{dQ}$ for each of the following:

$$(i) Q = p^3 + 2P^2 + 7P$$

$$(ii) Q = 35 - 0.25P$$

(c) Test the mean-value theorem on the function $f(x) = x^2 - 6x + 8$ in the interval $[2, 5]$.

(d) Find the equation of the tangent to the following at the specified point:

$$(i) y = x^3 - 3x \text{ at } (2, 2)$$

$$(ii) y = \frac{2x+1}{3-x} \text{ at } (2, 5) \quad (3 \times 5 = 15)$$

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिये :

(क) निम्नलिखित की सभी अंतरस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिये :

$$(i) f(x) = \ln(3x - 9)$$

$$(ii) f(x) = \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - x - 12}$$

(ख) क्या निम्नलिखित फलनों का (जहाँ Q, P का फलन है) प्रतिलोम फलन है? क्यों या क्यों नहीं?

यदि हाँ, तो $\frac{dP}{dQ}$ ज्ञात कीजिये:

$$(i) Q = p^3 + 2P^2 + 7P$$

$$(ii) Q = 35 - 0.25P$$

(ग) अन्तराल $[2, 5]$ में फलन $f(x) = x^2 - 6x + 8$ के लिये मध्य मान प्रमेय (mean value theorem) की जाँच कीजिये।

(घ) दिये हुए बिंदु पर स्पर्शी रेखा की समीकरणों को ज्ञात कीजिये :

$$(i) y = x^3 - 3x \text{ at } (2, 2)$$

$$(ii) y = \frac{2x+1}{3-x} \text{ at } (2, 5)$$

5. Answer any **three** of the following:

- (a) Find the stationary points for the function $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$. Also, find the interval(s) where the function is increasing or decreasing.
- (b) The demand function of a firm is given by $2p + 3x = 60$, where p is the price per unit and x is the number of units demanded. Find the level of output which maximises the total revenue and also find the maximum total revenue.
- (c) Find the interval(s) where the function defined by $y = x^4 - 4x^3$ is concave/convex. Use this information to find possible point(s) of inflection. Substantiate your answer with a graph.

(d) If you invest Rs. 2500 in an account, what is the formula you would use to calculate balance in the account inclusive of interest after 4 years if you earn:

(i) 1.7% interest per annum compounded annually?

(ii) 1.5% interest per annum compounded monthly?

(iii) 0.7% interest per annum compounded continuously? $(3 \times 5 = 15)$

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिये :

(क) फलन $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$ के लिए स्तब्ध बिंदु ज्ञात कीजिए। वे अन्तराल भी ज्ञात कीजिए जहाँ फलन में वृद्धि या कमी हो रही है।

(ख) एक फर्म की मांग फलन $2p + 3x = 60$ दिया है, जहाँ p प्रति इकाई मूल्य है एवं x मांगी गयी इकाइयों की मात्रा है। उत्पादन के उस स्तर का पता लगाएं जो कुल राजस्व को अधिकतम करता हो एवं अधिकतम कुल राजस्व भी ज्ञात कीजिए।

(ग) वे अंतराल ज्ञात कीजिये जहाँ फलन $y = x^4 - 4x^3$ अवतल है और जहाँ यह फलन उत्तल है। यह जानकारी का उपयोग करते हुए संभव नति परिवर्तन बिंदु ज्ञात कीजिये और एक ग्राफ के द्वारा अपने उत्तर की पुष्टि कीजिये।

(घ) यदि आप एक खाते में Rs. 2500 निवेश करते हैं तो 4 साल के बाद आप शेष राशि ब्याज सहित की गणना करने के लिए किस फार्मूला का प्रयोग करेंगे, यदि आपकी ब्याज कमाने की दर निम्नलिखित है:

(i) प्रति वर्ष 1.7% सालाना चक्रवृद्धि?

(ii) प्रति वर्ष 1.5% मासिक चक्रवृद्धि?

(iii) प्रति वर्ष 0.7% निरंतर चक्रवृद्धि?

6. Answer all the questions :

(a) Compute the area under the curve of the following function :

$$f(x) = \frac{1}{1+x} + 2x \text{ over } [0, 4].$$

OR

$$\text{find } \int (2e^{2x} + \frac{14x}{7x^2 + 5}) dx$$

(b) Solve the following difference equations. In each case, determine whether the solution path is convergent or divergent and oscillatory or non-oscillatory.

$$(i) x_t = -3x_{t-1} + 4, \quad x_0 = 2$$

$$(ii) x_t = 0.5x_{t-1} + 3, \quad x_0 = 5$$

OR

Given the following model where the demand and supply functions for oranges are, respectively given by :

$$Q_{dt} = 10 - 2P_t$$

$$Q_{st} = -5 + 4P_{t-1}$$

where Q_{dt} and Q_{st} represent the quantity demanded and quantity supplied of oranges at time t , and P_t represents the price in time period t .

- (i) Find the expression for P_t (price in time period t) in terms of P_{t-1} (price in time period $t-1$) in equilibrium.
- (ii) Solve the corresponding difference equation.
- (iii) Comment whether the time path is convergent/ divergent and oscillatory/ non-oscillatory. (2×3=6)

निम्नलिखित सभी के उत्तर दीजिये :

(क) फलन $f(x) = \frac{1}{1+x} + 2x$ के वक्र के नीचे $[0,4]$ के अंतर्गत क्षेत्र की गणना कीजिए।

अथवा

$$\int (2e^{2x} + \frac{14x}{7x^2 + 5}) dx \text{ ज्ञात कीजिए।}$$

(ख) निम्नलिखित अंतर समीकरणों का हल ज्ञात कीजिये एवं निर्धारित कीजिये कि समयपथ दोलनकारी/अदोलनकारी है और असंसृत/संसृत है:

$$(i) x_t = -3x_{t-1} + 4, \quad x_0 = 2$$

$$(ii) x_t = 0.5x_{t-1} + 3, \quad x_0 = 5$$

अथवा

निम्नलिखित मॉडल दिया है जहाँ संतरो के लिये मांग एवं आपूर्ति फलन क्रमशः निम्नलिखित दी गई है

$$Q_{dt} = 10 - 2P_t$$

$$Q_{st} = -5 + 4P_{t-1}$$

जहाँ Q_{dt} तथा Q_{st} समय t पर क्रमशः संतरो की माँग की मात्रा तथा आपूर्ति मात्रा को दर्शाते हैं तथा P_t समय t पर संतरो की कीमत है।

- (i) संतुलन में समय t की कीमत, P_t , को समय $t-1$ की कीमत, P_{t-1} , के रूप में अभिव्यक्त कीजिये।
- (ii) भाग (i) से संबंधित अंतर समीकरण का हल कीजिये।
- (iii) समय पथ पर टिप्पणी कीजिये कि क्या समयपथ दोलनकारी/ अदोलनकारी और संसृत/असंसृत है।