

[This question paper contains 10 printed pages.]

Sr. No. of Question Paper : 6003

G

Your Roll No.....

Unique Paper Code : 227103

Name of the Paper : Mathematical Methods for Economics – I

Name of the Course : B.A. (Hons.) Economics

Semester : I

Duration : 3 Hours

Maximum Marks : 75

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. There are six questions in all.
3. All questions are compulsory.
4. Use of simple calculator is allowed.
5. All parts of a question should be answered together.
6. Answers may be written either in English or in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए ।
2. कुल छः प्रश्न हैं ।
3. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।
4. साधारण कैलक्यूलेटर का उपयोग किया जा सकता है ।
5. प्रत्येक प्रश्न के सभी भागों को एक ही स्थान पर हल कीजिए ।
6. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए ।

P.T.O.

1. Answer any two of the following :

(2×4=8)

(a) (i) Solve for x when :

$$\frac{3x+2}{x-1} > 2 - x$$

(ii) Given sets A, B, C, prove or disprove :

$$(A \setminus B) \cap C = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

(b) (i) Find the domain of the function :

$$y = \log\left(\log\left(\frac{x}{x-3}\right)\right)$$

(ii) Is $x \geq -3$ a necessary condition for $2x + 6 \geq 4$?

(c) (i) Draw the graph of $y = -(x-1)^{1/3}$ using the graph of $y = x^{1/3}$.

(ii) If $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ and $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$, is $f(x) = g(x)$? Why or why not ?

निम्नलिखित में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए :

(क) (i) x के लिए हल कीजिए :

$$\frac{3x+2}{x-1} > 2 - x$$

(ii) दिए गए तीन समुच्चयों A, B, C, हेतु निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए या गलत सिद्ध कीजिए :

$$(A \setminus B) \cap C = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

- (ख) (i) निम्नलिखित फलन का परास (domain) ज्ञात कीजिए :

$$y = \log\left(\log\left(\frac{x}{x-3}\right)\right)$$

- (ii) क्या $2x + 6 \geq 4$ के सत्य होने के लिए $x \geq -3$ एक आवश्यक शर्त है ?

- (ग) (i) $y = x^{1/3}$ के आरेख की सहायता से $y = -(x-1)^{1/3}$ का आरेख बनाइए ।

- (ii) यदि $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ एवं $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$, तो क्या $f(x) = g(x)$? क्यों या क्यों नहीं ?

2. Answer any four of the following :

(4×4=16)

- (a) (i) Let n be a positive integer. Show that there is a number c between 0 and x such that

$$\frac{(1+x)^n - 1}{x} = n(1+c)^{n-1}$$

- (ii) Use part (i) to evaluate

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$$

- (b) Find the quadratic approximation of $f(x) = \ln(1+x)$ around $x = 0$ and find the Lagrange bound on absolute error when $|x| \leq 0.1$.

- (c) Perform test for convergence for the following :

(i) $\left\{ (-1)^n \frac{2n^3}{n^3+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n-1}}{3^{3n+1}}$

(d) (i) Given $f(x) = \ln|g(x)|$, find f' in terms of g' .

(ii) Find $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

(e) Suppose f and g are differentiable functions of x . Express $El_x(f+g)$ in terms of $El_x(f)$ and $El_x(g)$ where El denotes elasticity.

निम्नलिखित में से किन्हीं चार के उत्तर दीजिए :

(क) (i) मान लीजिए n एक धनात्मकपूर्णांक है। दर्शाइए कि 0 और x के मध्य एक ऐसी संख्या c विद्यमान होती है कि :

$$\frac{(1+x)^n - 1}{x} = n(1+c)^{n-1}$$

(ii) भाग (i) की सहायता से निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$$

(ख) $x = 0$ के पास $f(x) = \ln(1+x)$ का द्विघात सन्निकटन (quadratic approximation) ज्ञात कीजिए व यदि $|x| \leq 0.1$ हो तो सन्निकटन निरपेक्ष त्रुटि की लैग्रान्ज (Lagrange) सीमा भी ज्ञात कीजिए।

(ग) निम्नलिखित का अभिसरण हेतु परीक्षण कीजिए :

(i) $\left\{ (-1)^n \frac{2n^3}{n^3+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n-1}}{3^{3n+1}}$

(घ) (i) g' के पदों में f' को ज्ञात कीजिए, यदि $f(x) = \ln|g(x)|$.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ को ज्ञात कीजिए।

(ङ) मान लीजिए f व g , x के अवकलनीय फलन हैं। $El_x(f+g)$ को $El_x(f)$ व $El_x(g)$ के पदों में व्यक्त कीजिए जहाँ El लोच को निरूपित करता है।

3. Answer any **three** of the following :

(3×5=15)

(a) For each of the following functions prove that the inverse exists :

(i) $f(x) = 3 + x + e^x$

(ii) $g(x) = \ln(x + 3)$

Find $(f^{-1})'$ at 4 and $(g^{-1})'$ at 0.

(b) Find on the part of the rectangular hyperbola $xy = 4$ in positive quadrant the point which is nearest to the origin 0 and show that the shortest distance is perpendicular to the tangent at this point. What is the shortest distance ?

(c) (i) Find vertical and horizontal asymptote, if any, of the function

$$f(x) = \frac{3x-2}{(x+1)^2(x-2)}$$

(ii) Find 'a' and 'b' that will guarantee that the graph of $f(x) = \frac{ax+5}{3-bx}$ will have a vertical asymptote at $x = 5$ and horizontal asymptote at $y = -3$.

$$(d) \text{ If } f(x) = \begin{cases} -2x & \text{if } x < 1 \\ \sqrt{x} - 3 & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

Sketch the graph of f . Also, comment on the continuity and differentiability of the function $f(x)$ at $x = 1$.

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिए :

(क) निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन हेतु सिद्ध कीजिए कि प्रतिलोम फलन विद्यमान है :

$$(i) f(x) = 3 + x + e^x$$

$$(ii) g(x) = \ln(x + 3)$$

4 पर $(f^{-1})'$ तथा 0 पर $(g^{-1})'$ ज्ञात कीजिए ।

(ख) धनात्मक अतिपरवलय $xy = 4$ के धनात्मक चतुर्थांश में स्थित भाग पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो कि मूल बिन्दु 0 से निकटतम है तथा दर्शाइए कि यह न्यूनतम दूरी इस बिन्दु पर स्पर्शरेखा के लम्बवत् है । न्यूनतम दूरी क्या है ?

(ग) (i) फलन $f(x) = \frac{3x-2}{(x+1)^2(x-2)}$ के लिए ऊर्ध्वाधर व क्षैतिज अनन्तस्पर्शियाँ (vertical and horizontal asymptote) ज्ञात कीजिए, यदि कोई हों ।

(ii) ज्ञात कीजिए 'a' और 'b' के वे मान जिनके अन्तर्गत $f(x) = \frac{ax+5}{3-bx}$ के आरेख का $x = 5$ पर एक ऊर्ध्वाधर अनन्तस्पर्शी हो व $y = -3$ क्षैतिज अनन्तस्पर्शी हो ।

$$(घ) \text{ यदि } f(x) = \begin{cases} -2x & \text{if } x < 1 \\ \sqrt{x} - 3 & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

तो f के ग्राफ का अनुरेखण कीजिए । फलन $f(x)$ की $x = 1$ पर संततता व अवकलनीयता पर टिप्पणी भी कीजिए ।

4. Answer any **three** of the following :

(3×5=15)

- (a) How long will it take for a sum of money M_0 to double if it is invested at an annual rate of interest $r=100\%$ compounded (i) quarterly and (ii) continuously.
- (b) Suppose you inherit a piece of land in a remote village whose market value in Rupees, t years from now is estimated to be $v(t) = 50,000 e^{\sqrt{t}}$. If the prevailing interest rate remains constant at 10% compounded continuously, when will it be most advantageous for you to sell the land ?
- (c) Find the elasticity of y with respect to x for the function $y = x^a e^{-b(x+c)}$. Show that elasticity decreases with x if $b > 0$.
- (d) Find the intervals where the function $f(x) = x^2 e^{-x}$ is increasing and decreasing.

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिए :

- (क) धन की राशि M_0 को दुगुना होने में कितना समय लगेगा यदि इसे ब्याज की वार्षिक दर $r=100\%$ पर निवेशित किया जाए तथा इस पर चक्रवृद्धि ब्याज-निम्नानुसार मिले (i) त्रैमासिक (ii) सतत रूप से ।
- (ख) मान लीजिए कि आपको एक दूरवर्ती गाँव में एक भूखण्ड विरासत में मिला है, जिसका आकलित बाजार मूल्य आज से t वर्ष बाद $v(t) = 50,000 e^{\sqrt{t}}$ है । यदि प्रचलित ब्याज दर 10% (वार्षिक चक्रवृद्धि के साथ) पर स्थिर रहती है, तो आपके लिए इस भूखण्ड को कब बेचना सर्वाधिक लाभकारी होगा ?
- (ग) फलन $y = x^a e^{-b(x+c)}$ हेतु y की x के सापेक्ष लोच ज्ञात कीजिए । दर्शाइए कि यदि $b > 0$ तो यह लोच x में वृद्धि के साथ कम होती है ।
- (घ) वे अन्तराल ज्ञात कीजिए जहाँ फलन $f(x) = x^2 e^{-x}$ वर्द्धमान (increasing) व हासमान (decreasing) है ।

5. Answer any **three** of the following : (3×5=15)

(a) Find the absolute maximum and minimum values of $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36$ on the interval $[1, 5]$ and determine where these values occur.

(b) Let f be defined for all x by $f(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$

(i) Compute $f'(x)$ and $f''(x)$.

(ii) Find the local extreme points, points of inflection and cusp of f .

(c) A quadratic profit function $\pi(x) = ax^2 + bx + c$, where x is output, is used to reflect the following assumptions :

(i) When $x = 0$, profits are negative.

(ii) The profit function is strictly concave.

(iii) The maximum profits occur at output level $x^* > 0$.

What restrictions need to be placed on values of the constants a , b and c in order to fulfil the above mentioned assumptions.

(d) Draw the graph and investigate the following functions for local extreme points.

$$(i) f(x) = \begin{cases} -x; & x < 0 \\ x+5; & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(ii) f(x) = \begin{cases} x^2 + 3; & x \neq 0 \\ 4; & x = 0 \end{cases}$$

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिए :

(क) अन्तराल $[1, 5]$ में $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36$ के निरपेक्षतः उच्चतम व निम्नतम मान ज्ञात कीजिए, तथा ज्ञात कीजिए कि ये मान कहाँ प्राप्त होते हैं।

(ख) मान लीजिए कि f सभी x हेतु $f(x) = (x^2 - 1)^{2.3}$ के द्वारा परिभाषित है।

(i) $f'(x)$ व $f''(x)$ ज्ञात कीजिए।

(ii) f के स्थानीय चरम बिन्दु, मोड़-बिन्दु (points of inflection) व दन्ताग्र-बिन्दु (cusp) ज्ञात कीजिए।

...

(ग) एक द्विघातीय लाभ फलन $\pi(x) = ax^2 + bx + c$, जहाँ x उत्पाद है, को निम्नलिखित मान्यताओं को परिलक्षित करने हेतु उपयोग किया जाता है:

(i) जब $x = 0$ तो लाभ नकारात्मक (negative) है।

(ii) लाभ फलन सख्ततः अवतल है।

(iii) लाभ का अधिकतम स्तर उत्पाद के स्तर $x^* > 0$ पर प्राप्त होता है।

उपरोक्त मान्यताओं को सन्तुष्ट करने हेतु स्थिरांकों a , b and c के मानों पर क्या प्रतिबन्ध लगाए जाने चाहिए ?

(घ) निम्नलिखित फलनों के रेखाचित्र बनाइए व इन फलनों की स्थानीय चरम बिन्दुओं हेतु जाँच कीजिए :

$$(i) f(x) = \begin{cases} -x; & x < 0 \\ x+5; & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(ii) f(x) = \begin{cases} x^2+3; & x \neq 0 \\ 4; & x = 0 \end{cases}$$

6. Answer all the questions :

(2×3=6)

(a) Find the consumption function $C(Y)$ when the marginal propensity to consume (MPC) function is given by :

$$MPC = \frac{dC}{dY} = 0.4 + \frac{0.1}{\sqrt{Y}} \text{ and } C(Y = 100) = 50.$$

OR

P.T.O.

Evaluate the following :

$$(i) \frac{d}{dt} \int_{-2t}^t \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$(ii) \frac{d}{dx} \int_2^{\ln(x)} (t^{2/3} + 9) dt$$

- (b) Solve the difference equation $x_t = -3x_{t-1} + 4$ and determine if the solution path is convergent or not.

निम्नलिखित में से सभी के उत्तर दीजिए :

(क) यदि उपभोग की सीमान्त उपयोगिता (MPC) फलन

$$MPC = \frac{dC}{dY} = 0.4 + \frac{0.1}{\sqrt{Y}} \text{ तथा } C(Y = 100) = 50$$

हो तो उपभोग फलन $C(Y)$ ज्ञात कीजिए।

OR

निम्नलिखित का मूल्यांकन कीजिए :

$$(i) \frac{d}{dt} \int_{-2t}^t \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$(ii) \frac{d}{dx} \int_2^{\ln(x)} (t^{2/3} + 9) dt$$

- (ख) अंतर समीकरण $x_t = -3x_{t-1} + 4$ का हल ज्ञात कीजिए एवं निर्धारित कीजिए कि समय पथ अभिसारी (convergent) है अथवा नहीं।