

[This question paper contains 12 printed pages.]

Sr. No. of Question Paper : 7918

GC

Your Roll No.....

Unique Paper Code : 12271102

Name of the Paper : Mathematical Methods for Economics – I

Name of the Course : B.A. (Hons.) Economics

Semester : I

Duration : 3 Hours

Maximum Marks : 75

**Instructions for Candidates**

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. There are six questions in all.
3. All questions are compulsory.
4. Use of simple calculator is allowed.
5. All parts of a question should be answered together.
6. Answers may be written either in English or in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

**छात्रों के लिए निर्देश**

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।
2. कुल छः प्रश्न हैं।
3. सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
4. साधारण कैलक्यूलेटर का उपयोग किया जा सकता है।
5. प्रत्येक प्रश्न के सभी भागों को एक ही स्थान पर हल कीजिए।
6. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

P.T.O.

1. Answer any two of the following :

(2×4=8)

(a) (i) Solve for y when

$$\frac{\frac{1}{y}-1}{\frac{1}{y}+1} \geq 1$$

(ii) Find the domain and range of the function  $f(x) = \frac{|x-1|}{(x-1)^2}$ .

(b) (i) Is  $x < -3$  a necessary condition for  $x(x+4) > 0$ ?

(ii) Given sets A, B, C, prove or disprove :

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$$

(c) (i) Is the function  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  defined by  $f(x) = (x-2)^2 + 3$  one-to-one? Why or why not? Find the range of the function.

(ii) For what values of x does the equation  $|y| = x$  define y as a function of x? Graph the relation  $|y| = x$ .

निम्नलिखित में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए :

(क) (i) y के लिए हल कीजिए यदि

$$\frac{\frac{1}{y}-1}{\frac{1}{y}+1} \geq 1$$

(ii) फलन  $f(x) = \frac{|x-1|}{(x-1)^2}$  का परास (domain) व परिसर (range) ज्ञात कीजिए।

- (ख) (i) क्या  $x < -3$ ,  $x(x + 4) > 0$  हेतु एक आवश्यक शर्त है ?
- (ii) दिए गए तीन समुच्चयों  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , हेतु निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए या गलत सिद्ध कीजिए :
- $$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$$
- (ग) (i) क्या  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  में  $f(x) = (x - 2)^2 + 3$  द्वारा परिभाषित फलन एक-से-एक (one-to-one) है ? क्यों या क्यों नहीं ? इस फलन का परास ज्ञात कीजिए ।
- (ii)  $x$  के किन मानों हेतु समीकरण  $|y| = x$ ,  $y$  को  $x$  के एक फलन के रूप में परिभाषित करता है ? सम्बन्ध  $|y| = x$  का आरेख बनाइए ।

2. Answer any four of the following :

(4×4=16)

(a) Compute the following limits :

(i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log_e x)^{1/x}$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_5 x}{\log_2 (x - 8)}$

(b) (i) Suppose  $f$  and  $g$  are differentiable functions of  $x$ . Express  $El_x f(g(x))$  in terms of  $El_u f(u)$  and  $El_x (u)$  (where  $u = g(x)$  and  $El$  denotes Elasticity).

(ii) Does the series  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right)^n$  converge ? Why or why not ?

- (c) Use the fact that  $\frac{d}{dx}(3x^4 + x^2 - 4x) = 12x^3 + 2x - 4$  to show that the equation  $12x^3 + 2x - 4 = 0$  has at least one solution in the interval  $(0, 1)$ :
- (d) (i) Find the linear approximation to  $f(x) = x^{3/2} + 2\sqrt{x}$ . Use it to approximate the value of  $f(16.01)$ , when the approximation is done around  $x = 16$ .
- (ii) Find  $\frac{dy}{dx}$  if  $y = f(g(x))$ , given  $f'(x) = \sqrt{3x+4}$  and  $g(x) = x^2 - 1$ .
- (e) If  $f(x) = \frac{(x-1)}{(x+1)}$  prove that  $f(x)$  has an inverse function. If  $g(x)$  is the inverse of  $f(x)$ , compute  $g'\left(\frac{1}{3}\right)$ .

निम्नलिखित में से किन्हीं चार के उत्तर दीजिए :

(क) निम्नलिखित सीमाओं को ज्ञात कीजिए :

(i)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log_e x)^{1/x}$

(ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_5 x}{\log_2 (x-8)}$

- (ख) (i) मान लीजिए  $f$  व  $g$ ,  $x$  के अवकलनीय फलन हैं।  $EI_x f(g(x))$  को  $EI_u f(u)$  व  $EI_x(u)$  के पदों में व्यक्त कीजिए (जहाँ  $u = g(x)$  तथा  $EI$  लोच को निरूपित करता है)।

(ii) क्या श्रृंखला  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right)^n$  अभिसारित (converge) होती है? क्यों या क्यों नहीं?

.....

(ग) कथन  $\frac{d}{dx}(3x^4 + x^2 + 4x) = 12x^3 + 2x + 4$  to की सहायता से दर्शाइए कि समीकरण

$12x^3 + 2x + 4 = 0$  का अन्तराल (0,1) में कम-से-कम एक हल है।

(घ) (i)  $f(x) = x^{3/2} + 2\sqrt{x}$  का रेखीय सन्निकटन ज्ञात कीजिए। इसकी सहायता से  $f(16.01)$  का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए, जहाँ सन्निकटन  $x = 16$  के आस-पास किया गया है।

(ii) यदि  $y = f(g(x))$ ,  $f'(x) = \sqrt{3x+4}$  तथा  $g(x) = x^2 - 1$  तो  $\frac{dy}{dx}$  ज्ञात कीजिए।

(ङ) यदि  $f(x) = \frac{(x-1)}{(x+1)}$  तो सिद्ध कीजिए कि  $f(x)$  का प्रतिलोम फलन (inverse function)

विद्यमान है। यदि  $g(x)$ ,  $f(x)$  का प्रतिलोम फलन है तो  $g'\left(\frac{1}{3}\right)$  की गणना कीजिए।

3. Answer any three of the following :

(3×5=15)

(a) Graph the function :

$$f(x) = \begin{cases} x^{2/3} & x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$$

Find the point(s) of discontinuity. Comment on the nature of discontinuity.

(b) Find vertical and horizontal asymptotes, if any, for the following functions :

(i)  $f(x) = x2^{-x}$

(ii)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$

(c) Show that  $f(x) = 20x - e^{-4x}$  has exactly one root.

(d) Show, using implicit differentiation that any tangent line at a point P to a circle with centre O (0, 0) is perpendicular to radius OP.

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिए :

(क) निम्नलिखित फलन का आरेख बनाइए :

$$f(x) = \begin{cases} x^{2/3} & x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases}$$

असंतता (discontinuity) के बिन्दु ज्ञात कीजिए। असंतता की प्रकृति पर टिप्पणी कीजिए।

(ख) निम्नलिखित फलनों के ऊर्ध्वाधर (vertical) व क्षैतिज (horizontal) अनन्तस्पर्शियाँ (asymptotes) ज्ञात कीजिए, यदि कोई हैं :

(i)  $f(x) = x2^{-x}$

(ii)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$

(ग) दर्शाइए कि  $f(x) = 20x - e^{-4x}$  का ठीक एक मूल है।

(घ) परोक्ष अवकलन (implicit differentiation) की सहायता से दर्शाइए कि केन्द्र  $O(0,0)$  वाले एक वृत्त के किसी बिन्दु  $P$  पर स्पर्श रेखा, त्रिज्या (radius)  $OP$  के लम्बवत् होती है।

4. Answer any **three** of the following : . . . (3×5=15)

(a) A psychologist measures a child's capability to learn and remember by the function :

$$L(t) = \frac{\ln(t+1)}{t+1}$$

where  $t$  is the child's age in years, for  $0 \leq t \leq 5$ .

(i) At what age does a child have the greatest learning capability ?

(ii) Find the proportionate rate of growth of  $L(t)$ .

(iii) Is the proportionate rate of growth of  $L(t)$  positive for  $0 \leq t \leq 5$  ?

(b) Suppose that a project has an immediate cost of Rs. 10 crores. It involves running costs of Rs. 1 crore per year in perpetuity, beginning at the end of a one-year construction period. At the end of this year, annual gross revenue from the project of Rs. 1.5 crores per year is generated in perpetuity.

(i) Is the project profitable if the interest rate is 8% per year ?

(ii) For what range of (non-negative) interest rates is the net present value positive ?

(c) Consider the function defined for all  $x \in \mathbb{R}$  by  $f(x) = e^{x+1} - x$ .

(i) Determine the sign of  $f'(x)$ .

(ii) Show that  $f(x) > 0$  for all  $x \in \mathbb{R}$ .

(iii) Draw the graph of  $f(x)$  and show that  $f(x) - 2$  has exactly one solution.

(d) Find constants A, B, C and D such that the graph of

$$f(x) = 3x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

will have horizontal tangents at  $(2, -3)$  and  $(0, 7)$ .

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिए :

(क) एक मनोवैज्ञानिक किसी बच्चे की सीखने व याद रखने की क्षमता को निम्नलिखित फलन द्वारा मापता है :

$$L(t) = \frac{\ln(t+1)}{t+1}$$

जहाँ  $t$ , बच्चे की आयु है (वर्षों में), व  $0 \leq t \leq 5$ .

(i) बच्चे की सीखने की क्षमता अधिकतम किस आयु में होती है ?

(ii)  $L(t)$  की आनुपातिक वृद्धि दर (proportionate rate of growth) ज्ञात कीजिए ।

(iii) क्या  $L(t)$  की आनुपातिक वृद्धि दर  $0 \leq t \leq 5$  हेतु धनात्मक है ?

(ख) मान लीजिए कि एक परियोजना की तत्काल लागत (immediate cost) 10 करोड़ रु. है ।

इसमें प्रचालन लागत (running costs) प्रतिवर्ष 1 करोड़ रु. है जो कि निर्माण-अवधि (एक वर्ष) के अन्त से प्रारम्भ होकर हर वर्ष लगती रहेगी । इसी वर्ष के अन्त से



प्रारम्भ होकर परियोजना से 1.5 करोड़ रु. का वार्षिक घरेलू राजस्व, हर वर्ष जनित होता रहेगा।

(i) यदि ब्याज दर 8% है तो क्या परियोजना लाभदायक है ?

(ii) ब्याज दर के मानों के किस अन्तराल (अऋणात्मक) हेतु निवल वर्तमान मान (net present value) धनात्मक होगा ?

(ग) सभी  $x \in \mathbb{R}$  हेतु  $f(x) = e^{x+1} - x$  द्वारा परिभाषित फलन पर विचार कीजिए।

(i)  $f'(x)$  का चिह्न निर्धारित कीजिए।

(ii) दर्शाइए कि सभी  $x \in \mathbb{R}$  हेतु  $f(x) > 0$  है।

(iii)  $f(x)$  का आरेख बनाइए व दर्शाइए कि  $f(x) - 2$  का ठीक एक हल है।

(घ) ऐसे स्थिरांकों A, B, C एवं D के मान ज्ञात कीजिए कि फलन

$$f(x) = 3x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

के वक्र का  $(2, -3)$  एवं  $(0, 7)$  पर क्षैतिज स्पर्श रेखाएं (horizontal tangents) हों।

5. Answer any three of the following :

(3×5=15)

(a) If  $f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}$ , find the intervals in which the function is increasing and/or decreasing.

(b) A single input,  $x$ , is used to produce output  $y$  and the production function is  $y = x^{1/3}$ ,  $x > 0$ . The cost function  $C(y) = 10g(y)$ , where  $x = g(y)$  is the inverse of the production function. Show that the production function is strictly concave and the cost function is strictly convex.

(c) For what values of  $c$  does the polynomial  $P(x) = x^4 + cx^3 + x^2$  have :

(i) Two inflection points ?

(ii) No inflection point ?

In case (i), does the curve change from concave to convex or convex to concave ?

(d) Given the function  $f(x) = (x^2 + x)^{2/3}$ , do global extreme points exist in  $[-2, 3]$ . If yes, find them.

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिए :

(क) यदि  $f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$ , तो वे अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें यह फलन वर्द्धमान तथा/या हासमान है।

(ख) एक आगत (input)  $x$  का उपयोग उत्पाद  $y$  को बनाने हेतु किया जाता है तथा उत्पादन फलन  $y = x^{1/3}$  है  $x > 0$ . लागत फलन  $C(y) = 10g(y)$  है, जहाँ  $x = g(y)$  उत्पादन फलन का प्रतिलोम फलन है। दर्शाइए कि उत्पादन फलन सख्ततः अवतल है (strictly concave) तथा लागत फलन सख्ततः उत्तल (strictly convex) है।

(ग)  $c$  के किस मान हेतु बहुपद  $P(x) = x^4 + cx^3 + x^2$  के

(i) दो मोड़ बिन्दु होंगे ?

(ii) कोई मोड़ बिन्दु नहीं होगा ?

स्थिति (i) में बताइए कि वक्र अवतल से उत्तल होता है या उत्तल से अवतल ?

(घ) फलन  $f(x) = (x^2 + x)^{2/3}$  के वैश्विक चरम बिन्दु क्या  $[-2, 3]$  में विद्यमान हैं ? यदि हाँ तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

6. Answer all the questions :

(2×3=6)

(a) Find the common area between  $x \leq 3 - y^2$  and  $x \geq -1$ .

OR

A function F is defined for all  $T > 0$  as follows :

$$F(T) = \frac{K}{T} \int_0^T e^{-\alpha x} dx$$

Evaluate the integral and prove that  $F(T)$  takes values in the interval  $(0, K)$ .

(b) A bank account gives an annual interest rate of 5% compounded monthly. If you invest Rs. 1000 initially and add Rs. 10 every month, write a difference equation which describes how the amount changes from month to month. The amount after  $n$  months is denoted by  $q_n$ . Solve the difference equation and comment on the time path. Is it convergent/divergent and oscillatory/non-oscillatory ?

OR

The population of an island is currently 50,000. It is declining at 1% per annum. However, there is net immigration of 5,000 persons each year. Write the difference equation for the population after  $t$  years and solve it. Find the steady state equilibrium and depict how the solution converges to/diverges away from the equilibrium state.

सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(क) वक्रों  $x \leq 3 - y^2$  व  $x \geq -1$  के मध्य (common) क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

अथवा

P.T.O.

एक फलन  $F$  को सभी  $T > 0$  हेतु निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है :

$$F(T) = \frac{K}{T} \int_0^T e^{-ax} dx$$

इस समाकलन का मान ज्ञात कीजिए व सिद्ध कीजिए कि  $F(T)$  के मान अन्तराल  $(0, K)$  में हैं।

(ख) एक बैंक खाता 5% वार्षिक की ब्याज दर देता है जिसे मासिक चक्रवृद्धि आधार पर जोड़ा जाता है। यदि आप प्रारम्भ में 1000 रु. का निवेश करें व तत्पश्चात् 10 रु. प्रति माह जोड़ें, तो इस राशि में महीना-दर-महीने परिवर्तन को दर्शाने वाला अन्तर समीकरण लिखिए।  $n$  महीने के बाद राशि को  $q_n$  से दर्शाया जाता है। इस अन्तर समीकरण को हल कीजिए व समय पथ पर टिप्पणी कीजिए। यह समय-पथ अभिसारी या अपसारी तथा दोलनशील है या अदोलनशील ?

अथवा

एक द्वीप की जनसंख्या अभी 50,000 है। यह प्रतिवर्ष 1% की दर से कम हो रही है। परन्तु प्रतिवर्ष 5,000 व्यक्तियों का निवल immigration हो रहा है।  $t$  वर्षों के बाद जनसंख्या हेतु अन्तर समीकरण लिखिए तथा इसे हल कीजिए। स्थायी अवस्था साम्यावस्था ज्ञात कीजिए व दर्शाइए कि किस प्रकार यह हल साम्यावस्था की ओर अभिसरित होता है/साम्यावस्था से दूर अपसारित होता है।