

This question paper contains 16+4 printed pages]

Your Roll No.

6306

B.A. (Hons.)/II Sem. B

ECONOMICS : Paper 06

(Mathematical Methods for Economics—II)

(Admissions of 2011 onwards)

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 75

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

Note :— Answers may be written *either* in English *or* in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी : इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए ।

All questions are compulsory.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।

1. Answer any *three* of the following : 3×6=18

- (a) Find the equation of the line in R^3 passing through the points (2, 4, -1) and (5, 0, 7). Where does the line intersect the xy -plane ? Using this equation to *exactly* describe the line segment joining the two given points.

P.T.O.

- (b) (i) When is the vector b said to be a linear combination of vectors x , y and z ?
- (ii) Consider the vectors $u = (1, 2, 3)$ and $v = (2, 3, 1)$.
- (a) Find k so that $w = (1, k, 4)$ is a linear combination of u and v .
- (b) Find conditions on a, b, c so that $w = (a, b, c)$ is a linear combination of u and v .
- (c) (i) A matrix P is orthogonal if $P^T P = I$. Prove that if P is an $n \times n$ matrix whose columns are all of length 1 and mutually orthogonal then P is orthogonal.
- (ii) Find out if A is an orthogonal matrix :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

- (d) (i) Let D be the 3×3 diagonal matrix with entries d_1, d_2 and d_3 along the diagonal and zero's elsewhere. Let $A = (a_{ij})$ be an arbitrary 3×3 matrix. Compute AD and DA . Show that AD multiplies the i th column of A by entry d_i while DA multiplies the i th row of A by entry d_i .
- (ii) If D is the 3×3 diagonal matrix with entries $d_1 = 2, d_2 = 3$ and $d_3 = 4$, find A such that $AD = DA$.

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन का उत्तर दीजिए :

- (क) बिंदु $(2, 4, -1)$ और $(5, 0, 7)$ में से गुजरती हुई R^3 में रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए । दो प्रदत्त बिंदुओं को जोड़ने वाले समय खंड का यथातथतः वर्णन करने के लिए इस समीकरण का उपयोग कीजिए ।

(ख) (i) सदिश b को कब सदिश x, y और z का एक घात संचय कहा जाता है ?

(ii) सदिश $u = (1, 2, -3)$ और $v = (2, 3, 1)$ पर गौर कीजिए ।

(a) k ज्ञात कीजिए जिससे $w = (1, k, 4)$ u और v का एक घात संचय हो ।

(b) a, b, c पर प्रतिबंध ज्ञात कीजिए जिससे $w = (a, b, c)$ u और v का एक घात संचय हो ।

(ग) (i) एक आव्यूह P लांबिक है, यदि $P^T P = I$ है । सिद्ध कीजिए कि यदि P एक $n \times n$ आव्यूह है जिसके सब स्तंभों की लंबाई 1 है और परस्पर लांबिक तब P लांबिक है ।

(ii) ज्ञात कीजिए कि क्या A एक लांबिक आव्यूह है :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

- (घ) (i) विकर्ण के साथ प्रविष्टि d_1, d_2 और d_3 और अन्यत्र शून्य के साथ D को 3×3 विकर्ण आव्यूह मान लीजिए । $A = (a_{ij})$ को एक स्वैच्छ 3×3 आव्यूह मान लीजिए । AD और DA अभिकलित कीजिए । प्रमाणित कीजिए कि प्रविष्टि d_i के द्वारा AD, प्रविष्टि d_i द्वारा A के i th स्तंभ को गुणित करता है, जबकि DA प्रविष्टि d_i द्वारा A की i th पंक्ति को गुणित करता है ।
- (ii) यदि D प्रविष्टि $d_1 = 2, d_2 = 3$ और $d_3 = 4$ के साथ 3×3 विकर्ण आव्यूह है, तब A ज्ञात कीजिए जिससे $AD = DA$ हो ।

2. (a) Consider the system of equations :

5

$$kx + y + z = 1$$

$$x + ky + z = 1$$

$$x + y + kz = 1.$$

Find all values of k for which the system of equations has :

- (i) a unique solution,
 - (ii) more than one solution and
 - (iii) no solution.
- (b) (i) Show that $P = 1/(1 + e^{-t})$ satisfies the logistic equation :

8

$$\frac{dP}{dt} = P(1 - P)$$

What is the limiting value of P at $t \rightarrow \infty$?

- (ii) Draw phase diagrams for any *two* of the differential equations below and determine the nature of the possible equilibrium states :

(a) $\dot{x} = xe^x$

(b) $\dot{x} = x(2 - x)$

(c) $\dot{x} = (x - 2)(x + 2)$.

(क) समीकरण निकायों पर गौर कीजिए :

$$kx + y + z = 1$$

$$x + ky + z = 1$$

$$x + y + kz = 1.$$

k के वे सब मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए समीकरण

निकाय का :

- (i) एक अद्वितीय हल है,
- (ii) एक से अधिक हल हैं और
- (iii) कोई हल नहीं है ।

(ख) (i) सिद्ध कीजिए कि $P = 1/(1 + e^{-t})$ वृद्धिघात

समीकरण :

$$\frac{dp}{dt} = P(1 - P) \text{ की तुष्टि करता है ।}$$

P की $t \rightarrow \infty$ के रूप में सीमांत मान क्या है ?

(ii) नीचे दिए गए अवकलज समीकरणों में से किन्हीं दो के लिए प्रावस्था आरेख बनाइए और संभाव्य संतुलन अवस्थाओं का स्वरूप निर्धारित कीजिए :

$$(a) \quad \dot{x} = xe^x$$

$$(b) \quad \dot{x} = x(2 - x)$$

$$(c) \quad \dot{x} = (x - 2)(x + 2)$$

3. Answer any *three* of the following :

3×4=12

(a) Sketch the graph of the following function in three-dimensional space and draw a set of level curves of height $c = 0, 2$:

$$f(x, y) = 2 - x - y,$$

for $x \geq 0, y \geq 0, f(x, y) \geq 0$.

(b) Given :

$$Q(K, L, N) = K^\rho L^\rho N^\rho e^{(\alpha K + \beta L + \gamma N)}$$

where ρ, α, β and γ are constants. Compute the sum of the partial elasticities of Q with respect to K, L and N .

(c) Suppose that $w = f(x, y, z)$:

(i) If x, y and z are functions of u and v find the partial derivatives of w with respect to u and v .

(ii) If x and y are functions of u and v and if z, u and v are functions of t , find the derivative of w with respect to t .

(d) For the functions below, find a unit vector in the direction in which $f(x, y)$ increases most rapidly at P :

(i) $f(x, y) = 4x^2y$ $P = (1, 1)$

(ii) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)^{1/2}$ $P = (1, 2)$.

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिए :

(क) निम्नलिखित फलन का त्रिविम आकाश में आलेख बनाइए और उच्चता $c = 0, 2$ के स्तर वक्रों का समुच्चय बनाइए :

$$f(x, y) = 2 - x - y,$$

for $x \geq 0, y \geq 0, f(x, y) \geq 0$.

(ख) प्रदत्त है :

$$Q(K, L, N) = K^\rho L^\rho N^\rho e^{(\alpha K + \beta L + \gamma N)}$$

जहाँ ρ , α , β और γ अचर हैं । K , L और N के संबंध में Q की आंशिक लोचों का योगफल अभिकलित कीजिए ।

(ग) मान लीजिए कि $w = f(x, y, z)$:

(i) यदि x , y और z ; u और v के फलन हैं, तब w का u और v के संबंध में आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए ।

(ii) यदि x और y , u और v के फलन हैं और यदि z , u और v , t के फलन हैं, तब t के संबंध में w का अवकलज ज्ञात कीजिए ।

(घ) नीचे दिए गए फलनों से वह मात्रक सदिश उस दिशा में ज्ञात कीजिए जिसमें $f(x, y)$ P पर सर्वाधिक तेजी से बढ़ता है :

(i) $f(x, y) = 4x^2y$ $P = (1, 1)$

(ii) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)^{1/2}$ $P = (1, 2)$.

4. Answer any two of the following :

2×5=10

- (a) Assuming all necessary differentiability, if $u = u(x, y)$ is homogeneous of degree k , then prove that :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k(k-1)u(x, y).$$

If $u = u(x, y)$ is homogeneous of degree 1, and $x, y > 0$, then prove that :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right)^2 = 0.$$

- (b) Express the quadratic forms below as a matrix product involving a symmetric coefficient matrix. How is this matrix related to the Hessian of the quadratic form ? Use the coefficient matrix to determine the definiteness of the quadratic forms :

(i) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2$

(ii) $g(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2.$

(c) Assume that $F(x, y, z) = c$ defines z implicitly as a function

of x and y . If $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, then find :

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ and } \frac{\partial z}{\partial y}$$

If z is defined implicitly by the equation :

$$x^2 + 2xyz + y^3 + e^z = 4$$

find :

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ and } \frac{\partial z}{\partial y}$$

निम्नलिखित में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए :

(क) सब आवश्यक अवकलनीयताओं को मानते हुए, यदि

$u = u(x, y)$ कोटि k का समघात है, तब सिद्ध कीजिए

कि :

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k(k-1)u(x, y).$$

यदि $u = u(x, y)$ कोटि 1 का समघात और $x, y > 0$, तब

सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right)^2 = 0.$$

(ख) सममित गुणांक आव्यूह सम्मिलित आव्यूह-गुणनफल के रूप में नीचे दिए गए द्विघाती समघात को व्यंजित कीजिए द्विघाती समघात के हेसियन से आव्यूह किस प्रकार संबंधित है । द्वि-घाती समघातों की निश्चितता के निर्धारण के लिए गुणांक आव्यूह का उपयोग कीजिए :

$$(i) \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2$$

$$(ii) \quad g(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 7x_2^2.$$

(ग) मान लीजिए कि $F(x, y, z) = c$, z को अप्रत्यक्षतः x और y के फलन के F के रूप में निश्चित करता है । यदि

$$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0, \text{ तब :}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ और } \frac{\partial z}{\partial y} \text{ ज्ञात कीजिए ।}$$

यदि z निम्नलिखित समीकरण द्वारा अप्रत्यक्षतः निर्धारित है, तब :

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ और } \frac{\partial z}{\partial y}$$

ज्ञात कीजिए :

$$x^2 + 2xyz + y^3 + e^z = 4.$$

5. Answer any two of the following : 2×5=10

(a) A monopolist produces two goods x and y . The demand

functions for the goods are :

$$x = 50 - 0.5p_x;$$

$$y = 76 - p_y.$$

If the cost is :

$$C(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 55.$$

Find the values of x , y which maximize profit. Also find the maximized profit and the prices charged by the monopolist.

(b) Examine the concavity/convexity of the following functions :

(i) $f(x, y) = x^\alpha + y^\beta$; $x, y > 0$; $0 < \alpha, \beta < 1$

(ii) $g(x, y) = (x + y)^{1/2}$; $x, y > 0$.

(c) Find and classify the stationary points of :

$$f(x, y) = 8xy - \frac{1}{4}(x + y)^4.$$

निम्नलिखित में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए :

(क) कोई एकाधिकारी दो वस्तु x और y द्विउत्पादित करता है । वस्तुओं के लिए माँग फलन है :

$$x = 50 - 0.5p_x;$$

$$y = 76 - p_y.$$

यदि लागत :

$$C(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 55$$

है तब x और y के मान ज्ञात कीजिए । अधिकीकृत लाभ एकाधिकारी द्वारा लगाई गई कीमत भी ज्ञात कीजिए ।

(ख) निम्नलिखित फलनों की उतलता/अवतलता का परीक्षण कीजिए :

$$(i) f(x, y) = x^\alpha + y^\beta; \quad x, y > 0; 0 < \alpha, \beta < 1$$

$$(ii) g(x, y) = (x + y)^{1/2}; \quad x, y > 0.$$

(ग) निम्नलिखित के स्तब्ध बिंदु ज्ञात और वर्गीकृत कीजिए :

$$f(x, y) = 8xy - \frac{1}{4}(x + y)^4.$$

6. Answer any two of the following :

2×6=12

(a) A consumer's utility function for two goods is :

$$U(x, y) = x^{1/2} y^{1/2}.$$

Write down the necessary conditions for the solution of the constrained optimization problem for general values of p_x , p_y and M . Find the optimal values of x and y and the corresponding value of λ . Check the second order conditions. What are the consumer's demand functions for x and y ? Find the indirect utility function

$$U^*(p_x, p_y, M) \text{ and verify that } \lambda = \frac{\partial U^*}{\partial M}.$$

- (b) Find the maximum and minimum values of :

$$f(x, y) = x + y$$

subject to the constraint :

$$g(x, y) = x^2 + y^2 = 4$$

Write down the Lagrangean function for the problem and solve the necessary conditions for the optimal solutions.

Find the determinant, $D(x, y)$ and check the second order condition. Explain the optimization solution geometrically by drawing the level curves of $f(x, y)$ together with the graph of the constraint.

- (c) Find the maximum and minimum values of :

$$f(x, y) = -x^2 - y^2$$

on the given set S which is the square region bounded by :

$$-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1.$$

निम्नलिखित में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए :

(क) दो वस्तुओं के लिए उपभोक्ता उपयोगिता फलन :

$$U(x, y) = x^{1/2} y^{1/2}$$

है । p_x , p_y और M के सामान्य मानों के लिए व्यवरोधित इष्टतमीकरण समस्या के हल के लिए अपेक्षित प्रतिबंध लिखिए । x और y के इष्टतम मान और λ के संगत मान ज्ञात कीजिए । द्वितीय प्रकार के प्रतिबंधों की जाँच कीजिए । x और y के लिए उपभोक्ता का माँग फलन क्या है ? $L^*(p_x, p_y, M)$ का अप्रत्यक्ष उपयोगिता फलन ज्ञात कीजिए और $\lambda = \frac{\partial U^*}{\partial M}$ सत्यापित कीजिए ।

(ख) निम्नलिखित के अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात

कीजिए :

$$f(x, y) = x + y$$

व्यवरोध

$$g(x, y) = x^2 + y^2 = 4$$

के अध्याधीन समस्या के लिए लग्रान्ज फलन लिखिए

और इष्टतम हलों के लिए आवश्यक प्रतिबंधों को हल

कीजिए । निर्धारक, $D(x, y)$ ज्ञात कीजिए और द्वितीय प्रकार

प्रतिबंध की जाँच कीजिए । व्यवरोध के आलेख के साथ

$f(x, y)$ के स्तर वक्रों को बताते हुए इष्टतमीकरण हल को

ज्यामितीय रूप में स्पष्ट कीजिए ।

(ग) निर्धारित समुच्चय S पर जो

$$-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1.$$

द्वारा परिबद्ध है

$$f(x, y) = -x^2 - y^2$$

के अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए ।