This question paper contains **15** printed pages]

Roll No. | | | | | | | | | | | |

S. No. of Question Paper : **7048**

Unique Paper Code : **227203** **D**

Name of the Paper : **Mathematical Methods for Economics–II**

Name of the Course : **B.A. (Hons.) Economics**

Semester : **II**

Duration : **3 Hours** Maximum Marks : **75**

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

(इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।)

Note : — Answers may be written either in English or in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी :— इस प्रश्न पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी में से किसी एक भाषा में दीजिए लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

All questions are compulsory.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

1. Answer any *four* of the following : 4×6=24

निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** के उत्तर दीजिए :

(A) For what values of α and β does the system of equations :

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 10$$

$$x + 2y + \alpha z = \beta$$

have no solution, a unique solution and several solutions ? When the system has solutions, find the solution (if unique) and describe the solution set (when not unique).

α व β के किन मानों हेतु समीकरण निकाय :

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 10$$

$$x + 2y + \alpha z = \beta$$

का कोई हल नहीं है, अद्वितीय हल है व कई हल हैं ? जब इस निकाय के हल हों तो हल ज्ञात कीजिए (यदि अद्वितीय हो) व हलों के समुच्चय का वर्णन कीजिए (यदि अद्वितीय नहीं हो)।

(B) (*i*) For $a, b \in \mathbf{R}^n$ prove that :

$$\| a+b \| = \| a-b \|$$

if and only if a and b are orthogonal. Interpret this result geometrically for $a, b \in \mathbf{R}^2$.

(*ii*) Let a and b be non-zero vectors in $\mathbf{R}^n$. Show that if a and b are orthogonal, then for any number :

$$\lambda \in \mathbf{R}, \| a + \lambda b \| \geq \| a \|.$$

Draw an illustrative diagram for $a, b \in \mathbf{R}^2$ and interpret the result geometrically.

(*i*) $a, b \in \mathbf{R}^n$ हेतु सिद्ध कीजिए कि

$$\| a + b \| = \| a - b \|$$

यदि व केवल यदि a व b लाम्बिक हैं। $a, b \in \mathbf{R}^2$ हेतु इस परिणाम की ज्यामितीय तौर पर व्याख्या कीजिए।

(*ii*) मान लीजिए a व b, $\mathbf{R}^n$ में अशून्य सदिश हैं। दर्शाइए कि यदि a व b लाम्बिक हैं, तो किसी संख्या :

$$\lambda \in \mathbf{R} \text{ हेतु } \| a + \lambda b \| \geq \| a \|,$$

$a, b \in \mathbf{R}^2$ हेतु एक दृष्टान्तात्मक रेखाचित्र बनाइए व परिणाम की ज्यामितीय तौर पर व्याख्या कीजिए।

(C) (*i*) Let L be the line through (0, 1, 2) in the direction given by the vector (1, 1, 1). What is the parametric equation of L ? At what point does it cross the XY plane ?

(*ii*) The parametric equations for the lines L_1 and L_2 are :

$$L_1 : x = t, y = 3t - 1, z = 4t$$

$$L_2 : x = 3t, y = 5, z = 1 - t$$

Do L_1 and L_2 intersect ?

(*i*) मान लीजिए कि L (0, 1, 2) से होकर सदिश (1, 1, 1) द्वारा दी गई दिशा में जाने वाली रेखा है। L का प्राचलीय समीकरण क्या है ? यह किस बिंदु पर XY समतल को प्रतिच्छेदित करती है ?

(*ii*) रेखाओं L_1 व L_2 के लिए प्राचलिक समीकरण निम्न प्रकार हैं :

$$L_1 : x = t, y = 3t - 1, z = 4t$$

$$L_2 : x = 3t, y = 5, z = 1 - t$$

क्या L_1 व L_2 प्रतिच्छेदन करती हैं ?

(D) Let D be a 3 × 3 matrix in which x, y and z are all distinct and non-zero.

$$D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

Show that if any matrix A commutes with D, then A must also be a diagonal matrix. What can be said if $x = y \neq z$?

मान लीजिए कि D एक 3 × 3 आव्यूह है जिसमें x, y व z सभी भिन्न हैं व अशून्य हैं :

$$D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

दर्शाइए कि यदि कोई आव्यूह A, D के साथ क्रमविनिमेय है, तो A भी विकर्ण आव्यूह होना चाहिए। यदि $x = y \neq z$ तो क्या कहा जा सकता है ?

(E) A matrix A is said to be skew-symmetric if A = – A'. Show that for any matrix A, the matrix A + A' is symmetric, and A – A' is skew-symmetric. Hence show that any matrix can be written as the sum of a symmetric and a skew-symmetric matrix.

एक आव्यूह तिरछा सममित (skew-symmetric) कहा जाता है यदि $A = -A'$। दर्शाइए कि किसी आव्यूह A हेतु $A + A'$ सममित होता है, व $A - A'$ तिरछा सममित होता है। इस प्रकार दर्शाइए कि कोई भी आव्यूह एक सममित व एक तिरछा सममित आव्यूह के योगफल के रूप में लिखा जा सकता है।

2. (A) Draw the phase diagram and determine the nature of the possible equilibrium states of the differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = y(y-2).$$ 4

निम्नलिखित अवकल समीकरण का प्रावस्था आरेख बनाइए व संभव संतुलन अवस्थाओं का स्वरूप निर्धारित कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = y(y-2)$$

(B) Show that

$$y(t) = 6e^{-3t} + 4$$

is the solution to the differential equation :

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 12$$

Does $y(t)$ converge to a steady state ? 4

दर्शाइए कि

$$y(t) = 6e^{-3t} + 4$$

अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 12$$

का हल है। क्या $y(t)$ एक स्थायी अवस्था की ओर अभिसारित होता है ?

Or

(अथवा)

(B) Show that :

$$y(t) = -14e^{-t/4} + 24$$

is the solution to the differential equation :

$$2\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = 12.$$

Does $y(t)$ converge to a steady state ? 4

दर्शाइए कि

$$y(t) = -14e^{-t/4} + 24$$

अवकल समीकरण

$$2\frac{dy}{dt}+\frac{1}{2}y=12.$$

का हल है। क्या $y(t)$ एक स्थायी अवस्था की ओर अभिसारित होता है ?

3. Answer any *two* of the following : 2×5=10

निम्नलिखित में से किन्हीं **दो** के उत्तर दीजिए :

(A) Find all the second-order partial derivatives of z for $z=x^2y^2e^{2xy}$.

$z=x^2y^2e^{2xy}$ हेतु z के द्वितीय क्रम के सभी आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए।

(B) Let

$$f(x, y)=-(1-x^2-y^2)^{½}$$

for (x, y) such that $x^2+y^2<1$. Show that the vector $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ is normal to the tangent plane to the surface $z=f(x, y)$ at $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Interpret this geometrically.

मान लीजिए

$$f(x, y)=-(1-x^2-y^2)^{½}$$

जहाँ (x, y) इस प्रकार के हैं कि $x^2 + y^2 < 1$। दर्शाइए कि सदिश $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ पर सतह $z = f(x, y)$ के स्पर्शी समतल के लम्बवत् है। इसकी ज्यामितीय तौर पर व्याख्या कीजिए।

(C) Output z is a function of inputs x and y : $z = f(x, y)$. Both marginal products are strictly positive and strictly diminishing. State the conditions for this to be true.

Input availabilities change over time,

$$x = \varphi(t) \text{ and } y = \mu(t).$$

Obtain expressions for dz/dt and d^2z/dt^2 in terms of the derivatives of f, φ and μ. If x and y grow with time but at decelerating rates, is it possible to conclude the same must be true of z ?

निर्गत (उत्पाद) z, x व y आगतों का फलन है। उत्पाद $z = f(x, y)$ दोनों सीमांत उत्पाद सख्तत: धनात्मक व सख्तत: ह्रासमान हैं। इस कथन के सत्य होने के लिए आवश्यक प्रतिबंधों का उल्लेख कीजिए।

आगतों की उपलब्धताएँ समय के साथ परिवर्तित होती हैं,

$$x = \varphi(t), \quad y = \mu(t) \text{ ।}$$

f, φ और μ के अवकलजों के पदों में dz/dt व d^2z/dt^2 के लिए व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए। यदि x व y में समय के साथ वृद्धि होती है, परन्तु ह्रासमान दरों के साथ तो क्या यह निष्कर्ष निकालना संभव है कि ऐसा z के लिए भी सत्य होना चाहिए।

4. Answer any *two* of the following : 2×6=12

निम्नलिखित में से किन्हीं **दो** के उत्तर दीजिए :

(A) Output z is linear honogenous function $F(x, y)$ of input quantities x and y. Show that the average product of each input (z/x and z/y) can be expressed as a function only of the ratio x/y in which the inputs are used. Show further that if the average product of an input increases as the quantity of that input is increased while keeping the quantity used of the other input fixed, the marginal product of the other input must be negative.

निर्गत (उत्पाद) z आगतों की मात्राओं x व y का रेखीय समाघात फलन है। दर्शाइए कि प्रत्येक आगत का औसत उत्पाद (z/x व z/y) केवल उस अनुपात (x/y) के फलन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है जिसमें आगतों का उपयोग किया जाता है। आगे दर्शाइए कि यदि दूसरे आगत की मात्रा स्थिर रखते हुए एक आगत की मात्रा बढ़ाए जाने पर उस आगत का औसत उत्पाद बढ़ता है तो दूसरे आगत का सीमांत उत्पाद ऋणात्मक होना चाहिए।

(B) Compute the directional derivatives of the following functions at the indicated points in the given direction d.

(a) $f(x, y) = x + 2x^2 - 3xy$; $(x_0, y_0) = (1, 1)$; $d = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

(b) $f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$; $(x_0, y_0) = (1, 0)$; $d = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

निम्नलिखित फलनों के निर्देशित बिन्दुओं पर दी गई दिशा d में दिशात्मक अवकलजों की गणना कीजिए :

(a) $f(x, y) = x + 2x^2 - 3xy$; $(x_0, y_0) = (1, 1)$; $d = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

(b) $f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$; $(x_0, y_0) = (1, 0)$; $d = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

(C) When y is eliminated from the two equations

$$z = f(x, y) \text{ and } g(x, y) = 0,$$

the result can be expressed in the form $z = h(x)$. Express the derivative $h'(x)$ in terms of the partial derivatives of f and g.

जब दो समीकरणों

$$z = f(x, y) \text{ व } g(x, y) = 0,$$

में से y को विलुप्त किया जाता है तो परिणाम को $z = h(x)$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। अवकलज $h'(x)$ को f व g के आंशिक अवकलजों के पदों में व्यक्त कीजिए।

5. Answer any *three* of the following : 3×7=21

निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** के उत्तर दीजिए :

(A) (*i*) Consider the problem of maximising $z = -(x^4 + y^4)$. Find the strict maxima. What is the problem in applying the condition that the Hessian matrix is negative definite ?

(*ii*) Let

$$z = 3x^4 - 4x^2y + y^2.$$

Show that on every line $y = mx$, the function z has a minima at (0, 0).

(*i*) $z = -(x^4 + y^4)$ को अधिकतम करने की समस्या पर विचार कीजिए। सख्त उच्चिष्ठ (strict maxima) ज्ञात कीजिए।

यह प्रतिबंध लागू करने में क्या समस्या है कि हेशियन आव्यूह (Hessian matrix) ऋणात्मक निश्चित (negative definite) होना चाहिए।

(*ii*) मान लीजिए

$$z = 3x^4 - 4x^2y + y^2$$

दर्शाइए कि प्रत्येक रेखा $y = mx$ पर (0, 0) पर फलन z का निम्निष्ठ (minima) है।

(B) With the help of an example, show that a function

$$z = f(x, y),$$

that is strictly quasi concave need not be concave.

एक उदाहरण की सहायता से समझाइए कि यह आवश्यक नहीं है कि एक फलन :

$$z = f(x, y)$$

जो कि सख्तत: लगभग-अवतल (strictly quasi concave) है, अवतल (concave) ही हो।

(C) Let

$$z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$$

Find the extreme points of the function z defined over the area bounded by the rectangle formed by the lines $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$ and $y = 2$.

मान लीजिए कि

$$z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$$

रेखाओं $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$ व $y = 2$ द्वारा निर्मित आयत द्वारा परिबद्ध क्षेत्र पर परिभाषित फलन z के चरम बिंदु (extreme point) ज्ञात कीजिए।

(D) Maximise the utility function :

$$U = f(x, y) = \ln(x) + y$$

subject to the budget constraint $p_x x + p_y y = M$. Check the second order conditions. What can you comment on the shape of the level curves ?

बजट व्यवरोध $p_x x + p_y y = M$ के अध्यधीन, उपयोगिता फलन :

$$U = f(x, y) = \ln(x) + y$$

को अधिकतम कीजिए। द्वितीय क्रम के प्रतिबंधों की जांच कीजिए। स्तर वक्रों की आकृति पर आप क्या टिप्पणी कर सकते हैं ?