This question paper contains **8+4** printed pages]

Roll No. | | | | | | | | | | | |

S. No. of Question Paper : **1323**

Unique Paper Code : **227203** **E**

Name of the Paper : **Mathematical Methods for Economics-II**

Name of the Course : **B.A. (Hons.) Economics**

Semester : **II**

Duration : **3 Hours** Maximum Marks : **75**

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

(इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए ।)

Note : Answers may be written *either* in English *or* in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी : इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेज़ी **या** हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए ।

All questions are compulsory.

Use of simple calculator is allowed.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।

साधारण कैलकुलेटर का इस्तेमाल कीजिए ।

1. Answer any *four* of the following : 4×6

(*a*) (*i*) For any two arbitrary vectors **u** and **v**, show **u** + **v** and **u** – **v** diagrammatically. If **u** + **v** and **u** – **v** form the diagonals of a rhombus, then prove that the diagonals of a rhombus are orthogonal.

P.T.O.

(*ii*) Comment on the solution/solutions of the following system of linear equations :

$$x + 2y + z = 0$$

$$x - y - 2z = 0$$

$$x + 4y \quad = 0.$$

(*b*) (*i*) An $n \times n$ matrix N is called Nilpotent. If $N^k = 0$ for some $k > 0$, show that N is not invertible.

(*ii*) If $A = [a_{ij}]$ is an $n \times n$ matrix then the trace of A is defined by

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Find the relationship between $tr(BA)$ and $tr(AB)$ for the following matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(*c*) Check the rank criterion for solvability of the following systems :

(*i*) $-4x + 6y + 4z = 4$

$2x - y + z = 1$

(*ii*) $x + 2y - 3z = 6$

$-2x - 4y + 6z = 10.$

Hence, solve the systems, if possible.

(*d*) An industrial system has two industries A and B, with the following input requirements :

To produce Re. 1.00 worth of output, industry A requires Re. 0.20 of its own product and Re. 0.30 of industry B's product.

Similarly, to produce Re. 1.00 worth of output, industry B requires Re. 0.10 of its own product and Re. 0.50 of industry A's product.

(*i*) Write the input-output matrix and the Leontief system for this economy.

(*ii*) Solve for the output vector, where the external demand is given by a vector $\begin{bmatrix} 40,000 \\ 80,000 \end{bmatrix}$.

(*e*) Determine whether the following pairs of lines and planes, (L_1, P_1) and (L_2, P_2), are parallel or perpendicular :

(*i*) $L_1 : x = -1 + 2t, \quad y = 4 + t, \quad z = 1 - t;$

$P_1 : 4x + 2y - 2z = 7.$

(*ii*) $L_2 : x = 4 + 2t, \quad y = -t, \quad z = -1 - 4t;$

$P_2 : 3x + 2y + z = 7.$

निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** के उत्तर दीजिए :

(के) (*i*) किन्हीं दो स्वैच्छिक सदिशों **u** एवं **v** के लिये, **u** + **v** एवं **u** – **v** को रेखाचित्र के द्वारा दर्शाइये । यदि **u** + **v** एवं **u** – **v** एक समचतुर्भुज के विकर्ण हैं, तो सिद्ध कीजिए कि एक समचतुर्भुज के विकर्ण लम्बवत् हैं ।

(*ii*) निम्नलिखित रैखिक समीकरणों निकाय के हल/हलों पर टिप्पणी कीजिए :

$$x + 2y + z = 0$$

$$x - y - 2z = 0$$

$$x + 4y \quad = 0.$$

(ख) (*i*) एक $n \times n$ आव्यूह (N) शून्य प्रबल कहलाता है । यदि $k > 0$ के लिये $N^k = 0$ है, तो दर्शाइये कि N प्रतिलोमनीय नहीं है ।

(*ii*) यदि $A = [a_{ij}]$ एक $n \times n$ आव्यूह है, तो A का अनुरेखण कीजिए, जहाँ

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

है । निम्नलिखित आव्यूहों के लिये $tr(BA)$ एवं $tr(AB)$ के मध्य संबंध ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ \& } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ग) निम्नलिखित निकाय में समाधेयता के लिये कोटि कसौटी जाँच कीजिए :

(*i*) $-4x + 6y + 4z = 4$

$2x - y + z = 1$

(*ii*) $x + 2y - 3z = 6$

$-2x - 4y + 6z = 10$

अत: सम्भव हो तो निकाय को हत कीजिए ।

(घ) एक औद्योगिक प्रणाली में दो उद्योग A एवं B हैं, जिनकी आगत आवश्यकताएँ निम्न प्रकार हैं :

उद्योग A को 1 रुपये का उत्पाद बनाने के लिये अपने स्वयं उत्पाद की 0.20 रुपये एवं उद्योग B के उत्पाद की 0.30 रुपये की आवश्यकता होती है ।

इसी प्रकार उद्योग B को 1.00 रुपये का उत्पाद बनाने के लिये अपने स्वयं उत्पाद की 0.10 रुपये एवं उद्योग A के उत्पाद की 0.50 रुपये की आवश्यकता होती है ।

(*i*) इस अर्थव्यवस्था के लिये आगत-निर्गत आव्यूह एवं लियोण्टीफ तन्त्र लिखिये ।

(*ii*) निर्गत सदिश के लिये हल कीजिए, जहाँ बाह्य माँग एक सदिश $\begin{bmatrix} 40,000 \\ 80,000 \end{bmatrix}$ द्वारा दी गयी है ।

(ङ) निर्धारण कीजिए कि निम्नलिखित रेखायें एवं समतलों के जोड़े (L_1, P_1) एवं (L_2, P_2) समानांतर या लम्बवत् हैं :

(*i*) $L_1 : x = -1 + 2t, \quad y = 4 + t, \quad z = 1 - t;$

$P_1 : 4x + 2y - 2z = 7.$

(*ii*) $L_2 : x = 4 + 2t, \quad y = -t, \quad z = -1 - 4t;$

$P_2 : 3x + 2y + z = 7.$

2. Answer any *two* of the following : 2×4

(*a*) (*i*) Find the differential equations whose solutions generate straight lines passing through the origin.

(*ii*) Show that the system of concentric circles with the centre at the origin is :

$$x\,dx + y\,dy = 0.$$

P.T.O.

(*b*) Sketch the following set and explain why or why not it is a convex set :

$$S = \left\{(x, y) : y \leq \frac{1}{x}\right\}.$$

(*c*) Check the stability of the equilibrium states of the following differential equation :

$$\frac{dy}{dx} = y(y+1)(y+3).$$

निम्नलिखित में से किन्हीं **दो** के उत्तर दीजिए :

(क) (*i*) अवकलन समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका हल सीधी रेखायें उत्पन्न करता है जो कि मूल-बिन्दु से गुजरती हैं ।

(*ii*) दर्शाइये कि $x\,dx + y\,dy = 0$ मूल-बिन्दु पर केन्द्र के साथ संकेंद्रित वृत्त निकाय है ।

(ख) निम्नलिखित समुच्चय का आरेख बनाइए तथा व्याख्या कीजिए कि यह क्यों/क्यों नहीं एक उत्तल समुच्चय है :

$$S = \left\{(x\,y) : y \leq \frac{1}{x}\right\}.$$

(ग) निम्नलिखित अवकलन समीकरण के सन्तुलन की स्थिति की स्थिरता की जाँच कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} = y(+1)(y+3).$$

3. Answer any *two* of the following : 2×5

(*a*) (*i*) Find the domain of the following function :

$$f(x, y) = \ln (x^2 - y).$$

Hence, sketch the domain in the xy plane.

(*ii*) The length of a box is 8 metres and is increasing at the rate of 3 metres/second. Its width is 6 metres and is increasing at the rate of 2 metres/second, while its height is 4 metres and is increasing at the rate of 1 metre/second. At what rate would the volume of the box be changing ?

(*b*) Sketch the level curves for the following functions at heights specified by k :

(*i*) $f(x, y) = x^2 + y^2$ at the heights $k = 0, 4$.

(*ii*) $f(x, y) = 5 - x - y$ at the heights $k = 0, 5$.

(*c*) Determine the definiteness of the following quadratic forms :

(*i*) $q = -x_1^2 - x_2^2$

(*ii*) $q = u^2 - 2uv + v^2$ subject to $u + v = 0$.

निम्नलिखित में से किन्हीं **दो** के उत्तर दीजिए :

(क) (*i*) निम्नलिखित फलन का परास (domain) ज्ञात कीजिए :

$$f(x, y) = \ln (x^2 - y).$$

इससे xy समतल पर परास का रेखाचित्र बनाइये ।

(*ii*) एक डिब्बे की लम्बाई 8 मीटर है एवं इसमें 3 मीटर प्रति सेकण्ड की दर से वृद्धि हो रही है । इसकी चौड़ाई 6 मीटर है एवं यह 2 मीटर/से. की दर से बढ़ रही है, जबकि इसकी ऊँचाई 4 मीटर है एवं इसमें 1 मी./से. की दर से वृद्धि हो रही है, तो डिब्बे के आयतन में किस दर से वृद्धि होगी ?

(ख) k द्वारा दी गयी ऊँचाइयों के संगत में निम्नलिखित फलनों के स्तर वक्र बनाइये :

(*i*) $f(x, y) = x^2 + y^2$ ऊँचाई $k = 0, 4$ पर

(*ii*) $f(x, y) = 5 - x - y$ ऊँचाई $k = 0, 5$ पर ।

(ग) निम्नलिखित द्विघात पदों की निश्चितता का निर्धारण (परीक्षण) कीजिए :

(*i*) $q = -x_1^2 - x_2^2$

(*ii*) $q = u^2 - 2uv + v^2$ subject to $u + v = 0$.

4. Answer any *two* of the following : 2×6

(*a*) (*i*) Let $f(x, y) = xy$. Find the gradient at (1, 2). Hence find the directional derivative in the direction of the unit vector $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(*ii*) Find the equation of the tangent plane at a point (1, 1, 5) to the function :

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2.$$

Also, find the equation of the normal line to this surface at the given point.

(*b*) (*i*) The function g is defined by :

$$g(x, y) = f(x, y) - a \ln (x + y),$$

where a is a constant, $x + y > 0$ and f satisfies the condition

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = a$$

for all $f(x, y)$. Find the degree of homogeneity of $g(x, y)$.

(*ii*) Consider the functions :

$$g(y) = \ln (y) \text{ and } h(y) = y^2$$

where :

$$y = f(x_1, x_2) = x_1x_2 > 0.$$

Are the functions g and h homothetic ? Give reasons.

(*c*) (*i*) Find the linear approximation of $f(x, y) = xe^{xy}$ at (1, 0). Use it to approximate $f(1.1, -0.1)$.

(*ii*) Check the concavity/convexity of the following function :

$$f(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 - 3x - 8y \text{ for } (x, y) \neq (0, 0).$$

निम्नलिखित में से किन्हीं **दो** के उत्तर दीजिए :

(क) (*i*) माना $f(x, y) = xy$ है, तो बिन्दु (1, 2) पर ढाल सदिश ज्ञात कीजिए तथा इकाई सदिश $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ की दिशा में दिशात्मक अवकलज ज्ञात कीजिए ।

P.T.O.

(*ii*) फलन

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2$$

के लिये बिन्दु (1, 1, 5) पर स्पर्शरेखा समतल की समीकरण ज्ञात कीजिए । इन्हीं दिये बिन्दु पर इस समतल के लिये सामान्य रेखा का समीकरण भी ज्ञात कीजिए ।

(ख) (*i*) फलन g निम्नलिखित रूप से परिभाषित है :

$$g(x, y) = f(x, y) - a \ln (x + y)$$

जहाँ a एक स्थिरांक है, $x + y > 0$ तथा फलन f निम्नलिखित शर्त को संतुष्ट करता है :

$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = a$ सभी $f(x, y)$ के लिये ।

$g(x, y)$ के लिये समरूपता की कोटि ज्ञात कीजिए ।

(*ii*) फलन पर विचार कीजिए :

$g(y) = \ln (y)$ तथा $h(y) = y^2$

जहाँ

$y = f(x_1, x_2) = x_1x_2 > 0$ है ।

क्या फलन g एवं h होमोथैटिक हैं ? कारण दीजिए ।

(ग) (*i*) (1, 0) पर फलन $f(x, y) = xe^{xy}$ का रैखिक सन्निकटन ज्ञात कीजिए । इसका प्रयोग द्वारा $f(1.1, -0.1)$ का सन्निकटन कीजिए ।

(*ii*) निम्नलिखित फलन की अवतलता/उत्तलता की जाँच कीजिए :

$f(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 - 3x - 8y$ for $(x, y) \neq (0, 0)$.

3×7

5. Answer any *three* of the following :

(*a*) At which points on the circle $x^2 + y^2 = 1$ does the function $f(x, y) = xy$ have a maximum and a minimum ? Also, calculate the maximum and minimum values by using the Lagrange method.

(*b*) Find the maximum value of $f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$ on the closed triangular region R bounded by the straight lines $x = 0$, $y = 0$ and $5x + 3y = 15$.

(*c*) Locate all the extreme points and/or saddle points for the following functions :

(*i*) $f(x_1, x_2) = 100x_1 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 150x_2 - 3x_2^2$

(*ii*) $f(x_1, x_2) = 20x_1 - x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 35x_2$.

(*d*) An individual has a utility function $U = (x_1x_2)^2$ based on the purchase of two commodities, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. The prices of goods x_1 and x_2 are Rs. 2 per unit and Rs. 4 per unit respectively while his total income is Rs. 400. If he tries to get the maximum utility within the budget, then find out the quantities that he should purchase to maximize his utility by using the Lagrange method.

निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** के उत्तर दीजिए :

(क) वृत्त, $x^2 + y^2 = 1$ के किस बिन्दु पर फलन $f(x, y) = xy$ अधिकतम एवं न्यूनतम होगा ? लैग्रांजे विधि का प्रयोग करते हुए अधिकतम एवं न्यूनतम मूल्य भी ज्ञात कीजिए ।

(ख) सीधी रेखाओं, $x = 0$, $y = 0$ एवं $5x + 3y = 15$ से घिरा (परिबद्ध) बन्द त्रिकोणीय क्षेत्र R पर फलन $f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$ का अधिकतम मूल्य ज्ञात कीजिए ।

(ग) निम्नलिखित फलनों के सभी चरम व/या उदासीन बिन्दु ज्ञात कीजिए :

(*i*) $f(x_1, x_2) = 100x_1 - 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 150x_2 - 3x_2^2$

(*ii*) $f(x_1, x_2) = 20x_1 - x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2 - 35x_2$.

(घ) दो वस्तुओं, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ खरीदने पर आधारित, एक व्यक्ति का उपयोगिता फलन $U = (x_1x_2)^2$ है । वस्तु x_1 एवं x_2 की प्रति इकाई कीमत क्रमश: 2 रुपये एवं 4 रुपये है, जबकि उसकी आय 400 रुपये है । यदि वह दिये हुये बजट में अपनी उपयोगिता को अधिकतम करने की कोशिश करता है, तो लैग्रांजे विधि का प्रयोग करके उन मात्राओं को ज्ञात कीजिये जिससे उनकी उपयोगिता अधिकतम हो सकती है ।