This question paper contains 15 printed pages.]

Your Roll No. .....

6335

B.A. (Hons.) / III B

ECONOMICS – Paper 15

(Topics in Microeconomics)

(Admissions of 2005 and onwards)

Time : 2 Hours **Maximum Marks : 38**

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

Note : Answers may be written *either* in English *or* in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी : इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेज़ी **या** हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए ।

Attempt **all** questions.

सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

Throughout the question paper, "actions" and "pure strategies" are used interchangeably, as are "normal form game" and "strategic game".

प्रश्न-पत्र में आद्योपांत "क्रियाओं" और "अविकल्पी युक्तियों" को अंतर्बदल रूप में प्रयुक्त किया गया है और इसी प्रकार "प्रसामान्य रूप खेल" और "युक्तिपूर्ण खेल" को ।

1. (a) Find all Nash equilibria (in pure and mixed strategies) of the two person game. 7

	L	C	R
T	2, 0	1,1	4, 2
M	3, 4	1, 2	2, 3
B	1, 3	0, 2	3, 0

(b) Two candidates A and B compete in a local election in a village. The candidate who gets the larger number of votes wins the election. If they get an equal number of votes, the election is decided by tossing a fair coin. There are 100 voters in the village, of whom 51 support A and 49 support B. Each voter decides whether to vote for candidate he or she supports, or to abstain. Villagers get a payoff of +10 if their candidate wins, and a payoff of –10 if the other candidate wins. But voting is a nuisance that costs voters 1 (this cost is of course not incurred if a villager abstains). What are the Nash equilibria in pure strategies ? 7

(क) दो व्यक्ति खेल के सभी नैश संतुलन (अविकल्पी और सविकल्प युक्तियों में) ज्ञात कीजिए ।

	L	C	R
T	2, 0	1,1	4, 2
M	3, 4	1, 2	2, 3
B	1, 3	0, 2	3, 0

(ख) एक गाँव के स्थानीय चुनाव में दो उम्मीदवार A और B चुनाव लड़ रहे हैं । अधिक संख्या में मत पाने वाला उम्मीदवार चुनाव जीतता है । यदि उन्हें एक समान मत मिलते हैं तब एक खरा सिक्का उछाल कर चुनाव का निर्णय किया जाता है । गाँव में 100 मतदाता हैं, जिनमें से 51 A का समर्थन करते हैं और 49 B का । प्रत्येक मतदाता निश्चय करता है कि क्या वह उस उम्मीदवार को मत दे जिसका वह समर्थन करता है या मतदान न करे । गाँववालों को अपने उम्मीदवार के जीतने पर + 10 का पे ऑफ मिलता है और दूसरे उम्मीदवार के जीतने पर – 10 का पे ऑफ । लेकिन मतदान एक न्यूसन्स है जिससे मतदाताओं पर 1 की लागत पड़ती है (यह लागत गाँव वासी के मतदान न करने पर नहीं आती है) । अविकल्पी युक्तियों में नैश संतुलन क्या हैं ?

OR/अथवा

(a) Consider a game with three players 1, 2 and 3. The players' sets of pure strategies are respectively $S_1 = \{L, M, R\}$, $S_2 = \{U, D\}$, $S_3 = \{T, B\}$. In the box below are shown player 1's payoffs to each of his three pure strategies conditional on the pure-strategy choices of players 2 and 3. These are shown in the form of triples $(u_1(L), u_1(M), u_1(R))$, so that, for example, the payoff to player 1 when he plays M, player 2 plays U and player 3 plays T is 1.

	T	B
U	6, 1, 0	0, 4, 6
D	6, 4, 0	0, 1, 6

(i) Show that for player 1 the pure strategy M is not strictly dominated by either of the pure strategies L or R. Can M be strictly dominated by any mix of L and R ?

(ii) Suppose player 2 uses the mixed strategy $\underline{\alpha} = (\alpha, 1 - \alpha)$ and player 3 uses the mixed strategy $\underline{\beta} = (\beta, 1 - \beta)$. Show that M is never a best response for player 1 for any independent randomizations $\underline{\alpha}$ and $\underline{\beta}$. (You may find it helpful to consider the cases $\beta > \frac{1}{2}$, $\beta < \frac{1}{2}$ and $\beta = \frac{1}{2}$ separately.)

3 + 4 = 7

(b) Two people, 1 and 2, independently choose an integer between 1 and 4. If the choices are the same, each person receives an amount of money equal to the number chosen. Otherwise neither player receives anything. Each player's preferences are represented by his expected monetary payoff.

(i) What are the pure strategy Nash equilibria of the game ?

(ii) A mixed strategy profile (p, q) is one in which $p = (p_1, p_2, \ldots, p_4)$ is the mixed strategy of player 1, and $q = (q_1, q_2, \ldots, q_4)$ is the mixed strategy of player 2. Show that if $p_i^* > 0$ in a Nash equilibrium profile (p^*, q^*), then player 2 must also play i with strictly positive probability $q_i^* > 0$. (State clearly any theorem you use to show this. You are not required to justify the theorem.)

(iii) If in a Nash equilibrium $p_i^* > 0$ for all $i = 1, 2, \ldots, 4$, determine p^* and q^*.

1 + 3 + 3 = 7

(क) मानिए कि एक खेल है जिसमें 1, 2 और 3 खिलाड़ी हैं । खिलाड़ियों के अविकल्पी युक्तियाँ के सेट क्रमश:

$S_1 = \{L, M, R\}$, $S_2 = \{U, D\}$, $S_3 = \{T, B\}$ हैं । नीचे बॉक्स में खिलाड़ी 2 और 3 की अविकल्पी युक्तियों के चयन पर निर्भर खिलाड़ी 1 की तीन अविकल्पी युक्तियों में से प्रत्येक के लिए उसके पे-ऑफ दिखाए गए हैं । इन्हें त्रिश: $(u_1(L), u_1(M), u_1(R))$ के रूप में दिखाया गया है, जिससे उदाहरण के रूप में M खेलने पर खिलाड़ी 1 को पे ऑफ, U खेलने पर खिलाड़ी 2 को और T खेलने पर खिलाड़ी 3 को पे-ऑफ 1 है ।

	T	B
U	6, 1, 0	0, 4, 6
D	6, 4, 0	0, 1, 6

(i) प्रमाणित कीजिए कि खिलाड़ी 1 के लिए अविकल्पी युक्ति M, पर अविकल्पी युक्ति L अथवा R में से कोई भी दृढ़तः अभिभावी नहीं है । क्या L और R कोई सविकल्प M पर दृढ़तः अभिभावी हो सकता है ?

(ii) मान लीजिए खिलाड़ी 2 सविकल्प युक्ति $\underline{\alpha} = (\alpha, 1 - \alpha)$ का उपयोग करता है और खिलाड़ी 3 सविकल्प युक्ति $\underline{\beta} = (\beta, 1 - \beta)$ का । सिद्ध कीजिए कि किसी स्वतंत्र यादृच्छिकीकरण $\underline{\alpha}$ और $\underline{\beta}$ के लिए खिलाड़ी 1 के लिए M कभी भी सर्वोत्तम अनुक्रिया नहीं है । ($\beta > \frac{1}{2}, \beta < \frac{1}{2}$ और $\beta = \frac{1}{2}$ पर पृथक से विचार करना उपयोगी हो सकता है ।)

(ख) दो व्यक्ति '1 और 2' स्वतंत्र रूप से 1 और 4 के बीच एक पूर्णांक चुनते हैं । यदि चयन समान है तो प्रत्येक व्यक्ति को चुने गए अंक के बराबर मुद्रा-राशि प्राप्त होती है । अन्यथा किसी भी खिलाड़ी को कुछ नहीं मिलता है । प्रत्येक खिलाड़ी की पसंद को उसके प्रत्याशित मौद्रिक पे-ऑफ द्वारा निरूपित किया गया है ।

(i) खेल की अविकल्पी युक्ति नैश संतुलन क्या हैं ?

(ii) एक सविकल्प युक्ति प्रोफाइल (p, q) है जिसमें $p = (p_1, p_2, \ldots, p_4)$ है जो खिलाड़ी 1 की सविकल्प युक्ति है, और $q = (q_1, q_2, \ldots, q_4)$ खिलाड़ी 2 की सविकल्प युक्ति है । प्रमाणित कीजिए कि यदि नैश संतुलन प्रोफाइल (p^*, q^*) में $p_i^* > 0$ है, तब खिलाड़ी 2 को भी दृढ़तः धनात्मक प्रायिकता $q_i^* > 0$ के साथ i खेलना चाहिए । (इसे प्रमाणित करने के लिए प्रयुक्त किसी प्रमेय का सुस्पष्ट उल्लेख कीजिए । आपको प्रमेय का औचित्य सिद्ध करने की आवश्यकता नहीं है ।)

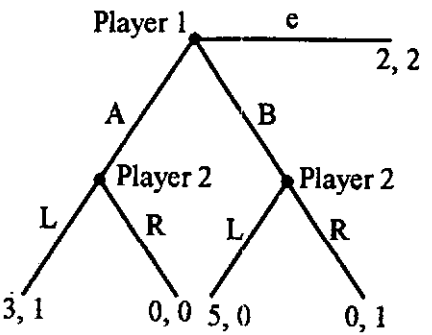
(iii) यदि नैश संतुलन में $p_i^* > 0$ for all $i = 1, 2, \ldots, 4$, तब p^* और q^* का निर्धारण कीजिए ।

2. (a) For the following extensive form game :

(i) Find the normal form representation.

(ii) Find all pure strategy Nash equilibria.

(iii) Which of these Nash equilibria is also subgame perfect ? If a Nash equilibrium is not subgame perfect, why not ? **3 + 2 + 3 = 8**



(b) Two players, 1 and 2, play the following Prisoner's Dilemma game repeatedly :

	C	D
C	4, 4	0, 6
D	6, 0	1,1

Both players discount future payoffs, and both have the same discount factor $\delta(0 < \delta < 1)$.

In the strategy tit-for-tat a player, i, plays C at the start of the repeated game and after any history in which the previous action of the other player, j, was C; if the other player plays D at any point; player i plays D in the next round; if j continues to play D, player i also continues to play D, but reverts to C if player j reverts to C.

(i) Show that the strategy pair in which each player plays tit-for-tat is a Nash equilibrium for the infinitely repeated game, provided the discount factor δ takes on suitable values.

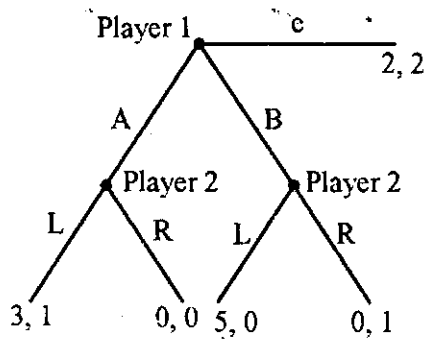
(ii) Is it a Nash equilibrium for the finitely repeated game for these (or other) values of δ ? $4 + 4 = 8$

(क) निम्नलिखित विस्तृत रूप खेल के लिए :

(i) प्रसामान्य रूप निरूपण ज्ञात कीजिए ।

(ii) सब अविकल्पी युक्ति नैश संतुलन ज्ञात कीजिए ।

(iii) इन नैश संतुलनों में से कौन सा उपखेल पूर्ण भी है ? यदि कोई नैश संतुलन उपखेल पूर्ण नहीं है, तो क्यों नहीं ?



(ख) दो खिलाड़ी 1 और 2 निम्नलिखित बंदी दुविधा खेल को बार-बार खेलते हैं :

	C	D
C	4, 4	0, 6
D	6, 0	1,1

दोनों खिलाड़ी भावी पे-ऑफ के लिए कटौती देते हैं और दोनों का कटौती घटक $\delta(0 < \delta < 1)$ समान है । जैसे को तैसा युक्ति में, खिलाड़ी i पुनरावृत्त खेल के शुरू में C खेलता है, और अन्य किसी पूर्ववृत्त के बाद जिसमें अन्य खिलाड़ी j, की पूर्व क्रिया C होती है, यदि अन्य खिलाड़ी किसी भी बिंदु पर D खेलता है, तब खिलाड़ी i अगले दौर में D खेलता है ; यदि j, D खेलना जारी रखता है, तो खिलाड़ी i भी D खेलना जारी रखता है, किंतु C पर लौट आता है, यदि खिलाड़ी j भी C पर लौटता है ।

(i) सिद्ध कीजिए कि युक्ति-युग्म जिसमें प्रत्येक खिलाड़ी जैसे को तैसा खेलता है, अपरिमिति रूप से पुनरावृत्त खेल के लिए नैश संतुलन है, बशर्ते कि कटौती घटक δ के उपयुक्त मान हों ।

(ii) क्या δ के इन (अथवा अन्य) मानों के लिए परिमित पुनरावृत्त खेल के लिए यह नैश संतुलन है ?

OR / अथवा

(a) In a two-player sequential game, first player 1 chooses L or R. If he chooses L, players 1 and 2 proceed to play the following simultaneous move game :

	A	B
A	2, 1	–2, 0
B	–2, 0	–1, 4

If he chooses R, they play

	A	B
A	4, 1	0, 0
B	0, 0	1, 4

(i) Find the normal form representation.

(ii) Find all pure strategy Nash equilibria.

(iii) Which of these Nash equilibria is also subgame perfect? **3 + 2 + 3 = 8**

(b) A and B would like to go out together. They have two options, either a dinner (D) or a movie (M). A prefers the dinner, while B prefers the movie. A player gets 3 if they go out together to his or her preferred place, 1 if they go out together to his unpreferred place and 0 if they end up at different places. A chooses first where to go.

(i) Suppose B knows where A has gone. Find a subgame perfect equilibrium. Is there a Nash equilibrium with a different outcome that is not subgame perfect ?

(ii) Suppose B does not automatically know where A has gone. He can, however, choose between Learn and Not-Learn (L and N). If he chooses L then he finds out without any cost where A has gone. Otherwise he chooses where to go without knowledge of where A has gone. Depict this game in the form of a tree, marking information sets, and find a subgame perfect equilibrium. Compare the outcome of the subgame perfect equilibrium of this game to that of the game in part (i). How would the subgame perfect equilibrium be affected if B could Learn only at some cost c ? **4 + 4 = 8**

(क) एक द्वि-खिलाड़ी आनुक्रमिक खेल में पहला खिलाड़ी 1 L अथवा R चुनता है । यदि वह L चुनता है, तो खिलाडी 1 और 2 निम्नलिखित समकालिक चाल खेल खेलते हैं :

	A	B
A	2, 1	–2, 0
B	–2, 0	–1, 4

यदि वह R चुनता है, तो वे खेलते हैं

	A	B
A	4, 1	0, 0
B	0, 0	1, 4

(i) प्रसामान्य रूप निरूपण ज्ञात कीजिए ।

(ii) सब अविकल्पी युक्ति नैश संतुलन ज्ञात कीजिए ।

(iii) इन नैश संतुलनों में से कौन सा उपखेल पूर्ण भी है ?

(ख) A और B दोनों साथ जाना चाहते हैं । उनके पास दो विकल्प हैं, या तो एक रात्रि भोज (D), अथवा एक चल चित्र (M). A रात्रि भोज को पसंद करता है, जबकि B चल चित्र को । खिलाड़ी A को 3 मिलेंगे यदि वे उसकी पसंद के स्थान पर इकट्ठे जाते हैं, 1 मिलेगा यदि वे उसके द्वारा ना पसंद किए गए स्थान पर जाते हैं और यदि वे अलग-अलग स्थान पर जाते हैं तो 0 मिलेगा । पहले A चुनता है कि कहाँ जाना है ।

(i) मान लीजिए B जानता है कि A कहाँ गया है । एक उपखेल पूर्ण संतुलन ज्ञात कीजिए । क्या कोई भिन्न परिणाम वाला नैश संतुलन है जो उपखेल पूर्ण नहीं है ?

(ii) मान लीजिए कि B स्वत: नहीं जानता कि A कहाँ गया है । किंतु वह जान पाना और न जान पाने (L और N) के बीच चुन सकता है । यदि वह L चुनता है, तो वह किसी लागत के बिना जान लेता है कि A कहाँ गया है । अन्यथा वह A कहाँ गया है इसकी जानकारी के बिना ही चला जाता है । इस खेल को एक तरु के रूप में प्रस्तुत कीजिए, जिसमें सूचना-सेट चिह्नित किए गए हों और एक उपखेल संतुलन ज्ञात कीजिए । इस खेल के उपखेल पूर्ण संतुलन के परिणाम की भाग (i) के खेल के परिणाम से तुलना कीजिए । उपखेल पूर्ण संतुलन किस प्रकार प्रभावित होता यदि B केवल कुछ लागत c पर जान पाता ?

3. Consider the Cournot duopoly model, where the two firms choose outputs simultaneously. The inverse demand function for the good is given by

$$P(Q) = \begin{cases} 2 - Q & \text{if} \quad Q \leq 2 \\ 0 & \text{if} \quad Q > 2 \end{cases}$$

where q_1, q_2 are the respective outputs of the two firms and $Q = q_1 + q_2$. Both firms aim to maximize profits. The cost functions are $C_i = c_i q_i$ for $c_i \in [0, 1]$. In period 1, each firm decides on how much to invest in R & D. In order to adopt a technology where its marginal cost be c_i, firm i has to invest $I_i = (1 - c_i)^2$. These R & D investment decisions are made simultaneously. In period 2 the firms engage in Cournot competition given their previously determined technologies. The net profit of firm i is

$$\pi_i = q_i(P - c_i) - (1 - c_i)^2 .$$

(a) Find the Nash equilibrium quantity choices q_1^*, q_2^* in period for given c_1 and c_2.

(b) Use part (a) write down the profits π_i as functions of c_1 and c_2 only. Hence determine the equilibrium levels of c_1 and c_2 and therefore of investment in R & D in period 1. **4 + 4 = 8**

ऐसे कॉर्नोट द्वयधिकार मॉडल को लीजिए जिसमें दो फर्में एक साथ उत्पाद चुनती हैं । वस्तु के लिए प्रतिलोम माँग फलन है

$$P(Q) = \begin{cases} 2 - Q & \text{if} \quad Q \leq 2 \\ 0 & \text{if} \quad Q > 2 \end{cases}$$

जिसमे q_1 और q_2 दोनों फर्मों के अपने-अपने उत्पादन है; और $Q = q_1 + q_2$ है । दोनों फर्मों का लक्ष्य अधिकतम लाभ है । लागत फलन $C_i = c_i q_i$ for $c_i \in [0, 1]$ हैं कालावधि 1 में प्रत्येक फर्म यह निश्चय करती है कि उसे अनुसंधान और विकास (R और D) में कितना निवेश करना है । एक ऐसी प्रौद्योगिकी अपनाने के लिए जिसमें सीमांत लागत c होगी, फर्म i को $I_i = (1 - c_i)^2$ का निवेश करना होगा । ये R और D निवेश निर्णय एक साथ करने होंगे । कालावधि 2 में अपनी पूर्व निर्धारित प्रौद्योगिकियों के कारण फर्में कॉर्नोट प्रतियोगिता अपनाती हैं । फर्म i का शुद्ध लाभ है ।

$$\pi_i = q_i(P - c_i) - (1 - c_i)^2$$

(क) दत्त c_1 और c_2 के लिए अवधि में नैश संतुलन मात्रा चयन q_1^*, q_2^* ज्ञात कीजिए ।

(ख) केवल c_1 और c_2 के फलनों के रूप में π_i लाभों का उल्लेख करने के लिए भाग (क) का उपयोग कीजिए । अब c_1 और c_2 के संतुलन स्तर निर्धारित कीजिए और अवधि 1 में R और D के निवेश ज्ञात कीजिए ।

OR / अथवा

Buyers of bread are uniformly distributed along a road that is one kilometre long. Every consumer buys one loaf of bread. Bread prices are regulated, so consumers simply go to the nearest vendor. Assume that at the regulated price, all consumers will buy a loaf even if they have to travel the full kilometre. Vendors of bread choose locations to maximize sales (maximize the number of consumers who buy from them; the price of a loaf is fixed by the regulator). If more than one vendor is at the same location, they split the buyers who come to that location evenly.

(a) Show that if two vendors are picking their locations simultaneously, there exists a pure strategy Nash equilibrium and describe the equilibrium.

(b) Show that if there are three vendors, no pure strategy Nash equilibrium exists. **4 + 4 = 8**

डबल रोटी के खरीदार एक किलोमीटर लंबे रास्ते पर एक समान रूप से बँटे हुए हैं । प्रत्येक उपभोक्ता एक डबल रोटी खरीदता है । डबल रोटी की कीमते नियंत्रित हैं, अत: उपभोक्ता निकटतम विक्रेता के पास जाता है । मान लीजिए कि नियंत्रित कीमत पर सब उपभोक्ता एक डबल रोटी खरीदेंगे यद्यपि, उन्हें पूरे एक किलोमीटर जाना पड़े । डबल रोटी विक्रेता अधिकतम बिक्री करने के लिए स्थान चुनते हैं (उनसे खरीदने वाले उपभोक्ताओं की संख्या अधिकतम करने के लिए, एक डबल रोटी की कीमत विनियामक द्वारा नियत करी हुई है) । यदि एक ही स्थान पर एक से अधिक विक्रेता हैं, तो वे समानत: उस स्थान पर आने वाले खरीदारों को विभाजित कर देते हैं ।

(क) सिद्ध कीजिए कि यदि दो विक्रेता अपने स्थान को समकालिक चुन रहे हैं, तब अविकल्पी युक्ति नैश संतुलन है और संतुलन का वर्णन कीजिए ।

(ख) सिद्ध कीजिए कि तीन विक्रेता होने पर कोई अविकल्पी युक्ति नैश संतुलन नहीं होगा ।