

This question paper contains 32 printed pages+7 Tables Attached]

Your Roll No.....

7079

B.A. (Hons.)/III

D

ECONOMICS—Paper 14

(Introductory Econometrics)

(Admissions of 2005 and onwards)

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 38

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

Note :— Answers may be written *either* in English *or* in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी : इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

The question paper consists of four questions. Attempt *all* four questions.

There is internal choice in each question. Marks allotted to each question are indicated in parentheses. Use of simple non-programmable calculator is allowed.

Statistical tables are attached for your reference.

इस प्रश्न-पत्र में चार प्रश्न हैं। सभी चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न में आंतरिक विकल्प है। प्रत्येक प्रश्न के आवंटित अंक कोष्ठकों में दिए गये हैं। साधारण अप्रोग्रामनीय गणकों का उपयोग किया जा सकता है। आपके संदर्भ हेतु सांख्यिकीय सारणियाँ संलग्न हैं।

1. (i) If the joint probability density function of two continuous random variables X and

Y is given by :

$$f(x, y) = \frac{2}{3} (x + 2y) \quad \forall \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

= 0 otherwise

P.T.O.

- (a) Find out the unconditional expected value of X .
- (b) Find out the conditional expected value of X , given that $Y = \frac{1}{2}$.
- (c) Are X and Y independent random variables ? 5
- (ii) A company that makes processed cheese is interested in determining whether some suppliers are adding water to their milk supply. It is known that excess water decreases the freezing point of milk. The freezing point of natural milk is normally distributed with mean of -0.545° Celsius and standard deviation 0.008° Celsius.
- A sample of 25 containers of milk is selected and the sample average freezing point is determined to be -0.550° Celsius. Do you think there is sufficient evidence, at 5% level of significance, that the company should pursue investigation of its milk suppliers ? State the null and alternate hypotheses carefully. 3

- (i) यदि दो सतत यादृच्छिक चरों X व Y का संयुक्त प्रायिकता घनत्व निम्न प्रकार है :

$$f(x, y) = \frac{2}{3} (x + 2y) \quad \forall 0 < x < 1, 0 < y < 1$$

$$= 0 \text{ otherwise}$$

(ब) X का अप्रतिबंधित प्रत्याशित मान ज्ञात कीजिए।

(ब) X का प्रतिबंधित प्रत्याशित मान ज्ञात कीजिए, जब $Y = \frac{1}{2}$.

(स) क्या X व Y स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं।

5

- (ii) प्रसंस्कृत पनीर बनाने वाली एक कम्पनी यह जानना चाहती है कि क्या कुछ दूध वितरक अपने द्वारा वितरित दूध में पानी मिलाते हैं। यह ज्ञात है कि पानी की अधिकता दूध का जमाव बिंदु घटाती है। प्राकृतिक दूध के जमाव बिंदु का बंटन प्रसामान्य है जिसका माध्य -0.525° सेल्सियस व मानव विचलन 0.008° सेल्सियस है। दूध के 25 डिब्बों के एक प्रतिदर्श का चयन किया गया व प्रतिदर्श का औसत जमाव बिंदु -0.550° सेल्सियस होना पाया गया। क्या आपको लगता है कि 5 प्रतिशत सार्थकता

स्तर पर इस बात के लिए पर्याप्त प्रमाण है कि कम्पनी अपने दूध वितरकों का अन्वेषण (जाँच) कराए ? निराकरणीय व वैकल्पिक प्राक्कल्पनाओं का स्पष्टतः उल्लेख कीजिए।

3

Or

(अथवा)

(i) Suppose X and Y are two random variables having the same standard deviation.

Consider two new variables, U and V defined as follows : $U = X + Y$ and

$V = X - Y$. Prove that the covariance between U and V is zero. 5

(ii) A large candy manufacturer produces packs of candy targeted to weigh 50 grams.

A quality control manager working for the company was concerned that the

variation in the actual weights of the targeted 50 gram packs was larger than

acceptable. In an attempt to estimate σ , the standard deviation of the weights

of all of the 50 gram packs the manufacturer makes, he took a random sample of size 20 packs. The random sample yielded a sample variance of 4.2 grams.

Use the random sample to derive a 95% confidence interval for σ . 3

- (i) मान लीजिए कि X और Y दो यादृच्छिक चर हैं जिनके मानक विचलन बराबर हैं। दो नए यादृच्छिक चरों पर विचार कीजिए जो कि इस प्रकार परिभाषित किए जाते हैं : $U = X + Y$ व $V = X - Y$ । सिद्ध कीजिए कि U व V के मध्य सहप्रसरण (covariance) शून्य है। 5

- (ii) मीठी गोलियों का एक बड़ा विनिर्माता इन गोलियों के पैकेट बनाता है जिनका वजन 50 ग्राम होना चाहिए। इस कम्पनी में कार्यरत एक गुणवत्ता नियंत्रण प्रबंधक को चिंता है कि इन 50 ग्राम के पैकेटों के वास्तविक वजन में अंतर स्वीकार्य स्तर से अधिक है। विनिर्माता द्वारा बनाए गए 50 ग्राम के सभी पैकेटों के वजनों के

मानक विचलन σ को आकलित करने के लिए उसने 20 पैकेटों का एक यादृच्छिक

प्रतिदर्श लिया। इस यादृच्छिक प्रतिदर्श का प्रतिदर्श प्रसरण 4.2 ग्राम होना पाया गया।

इस यादृच्छिक प्रतिदर्श का उपयोग करके σ के लिए 95 प्रतिशत विश्वस्यता अंतराल

का निर्माण कीजिए।

3

2. (i) Using quarterly data for 1965. Q1 to 1983. Q4 (76 observations) for an economy, the following model of consumption function was estimated :

$$PCE_i = B_1 + B_2PDI_i + B_3INTRATE_i + u_i$$

where

PCE : Personal consumption expenditures in billions of dollars

PDI : Personal disposable income in billions of dollars

INTRATE : Prime interest rate charged by banks, in percent

The table below has estimates of the coefficients and their t ratios :

	Estimates of Coefficients	t Ratios for statistical Significance
Constant	-10.96	-3.33
PDI	0.93	249.06
Intrate	-2.09	-3.09

- (a) Interpret the slope coefficients.
- (b) Perform an appropriate test, at 5% level of significance, to see if marginal propensity to consume is statistically different from 1.
- (c) If personal disposable income and personal consumption expenditures are measured in millions of dollars instead of billions of dollars, what will be the new numerical value of the coefficient of PDI and its t ratio ? 7

(ii) Show that the coefficient of determination, r^2 in a simple regression model,

$Y_i = B_1 + B_2X_i + u_i$, is obtained using the formula

$$r^2 = \frac{b_2^2 \sum x_i^2}{\sum y_i^2}$$

where b_2 is the ordinary least squares estimator of B_2 and x_i and y_i denote the deviations of X and Y observations from their respective means. 3

(i) एक अर्थव्यवस्था हेतु 1965. Q1 से 1983 Q4 के बीच की अवधि (76 प्रेक्षण) के लिए दिए गए त्रैमासिक आंकड़ों से उपभोग फलन के निम्नलिखित मॉडल का आकलन किया गया :

$$PCE_i = B_1 + B_2PDI_i + B_3INTRATE_i + u_i$$

जहाँ

PCE : व्यक्तिगत उपभोग व्यय (अरबों डॉलर में)

PDI : व्यक्तिगत प्रयोज्य आय (अरबों डॉलर में)

INTRATE : बैंकों द्वारा वसूल की जाने वाली प्रधान ब्याज दर प्रतिशत में

निम्नलिखित सारणी में गुणांकों के आकलन व उसके t अनुपात दिए गए हैं :

	गुणांकों के आकलन	सांख्यिकीय सार्थकता हेतु t अनुपात
Constant	-10.96	-3.33
PDI	0.93	249.06
Intrate	-2.09	-3.09

(अ) ढाल गुणांकों की व्याख्या कीजिए।

(ब) यह देखने के लिए कि क्या उपभोग की सीमांत प्रवृत्ति से सार्थकतः भिन्न है,

5. प्रतिशत सार्थकता स्तर पर एक उपयुक्त परीक्षण कीजिए।

(स) यदि व्यक्तिगत प्रयोज्य आय व व्यक्तिगत उपभोग व्यय को अरब डॉलर के स्थान

पर दस लाख डॉलर में मापा जाए तो PDI के गुणांक व इसके t अनुपात

के नए आंकिक मान क्या होंगे ?

7

P.T.O.

- (ii) दर्शाइए कि एक साधारण समाश्रयण $Y_i = B_1 + B_2X_i + u_i$ में निर्धारण गुणांक, r^2 निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त किया जाता है :

$$r^2 = \frac{b_2^2 \sum x_i^2}{\sum y_i^2}$$

जहाँ b_2 B_2 का साधारण न्यूनतम वर्ग आकलक है x_i व y_i और X व Y अपने-अपने माध्यों से विचलन हैं।

3

Or

(अथवा)

- (i) Using time series data for 1979 to 2009 for a certain economy, the following model of demand for money was estimated :

$$MD_i = B_1 + B_2Y_i + B_3INTRATE_i + u_i$$

where

MD : Quantity of money demanded, measured in billions of rupees

Y : National income, measured in billions of rupees

INTRATE : Interest rate on 3 month treasury bills, measured in percent

The table below has estimates of the coefficients and their standard errors :

	Estimates of Coefficients	Standard Errors
Constant	0.003	0.009
Y	0.530	0.112
Intrate	-0.0261	0.101

(a) Interpret the slope coefficients.

(b) Test the overall significance of the model, at 5% level of significance, if

coefficient of determination reported for the model is 0.519. 5

ii) Using data for 120 individuals, the following model of wage determination was

estimated :

$$WAGE_i = B_1 + B_2IQ_i + B_3PGRAD_i + u_i$$

where

WAGE : Hourly wages, in Rupees

IQ : Intelligent Quotient, measured on a scale of 70–130

PGRAD : Dummy variable = 1, if the individual is a postgraduate

= 0, if the individual is a undergraduate

The regression results were reported as follows, (standard errors in parentheses) :

$$\widehat{W}_i = 224.8438 + 5.0766IQ_i + 498.0493PGRAD_i$$

$$(66.6424) \quad (0.6624) \quad (20.0768)$$

$$\bar{R}^2 = 0.4540$$

- (a) Write down the estimated regression equation for post-graduates and undergraduates.

(b) Test the statistical significance of dummy variable at 5% level of significance.

What conclusion can you draw from this test ?

(c) If PGRAD was defined to take values [0, 2] instead of [0, 1] will the estimated value of B_3 and its standard error change ? What about its

statistical significance ?

5

(i) किसी अर्थव्यवस्था हेतु 1979 से 2009 तक के काल श्रेणी आँकड़ों का उपयोग करके

मुद्रा की माँग का निम्नलिखित मॉडल आकलित किया गया है :

$$MD_i = B_1 + B_2 Y_i + B_3 INTRATE_i + u_i$$

जहाँ

MD मुद्रा की माँग (अरब रुपयों में)

Y : राष्ट्रीय आय (अरब रुपयों में)

INTRATE : ब्याज की दर (प्रतिशत में) तीन माह के राजकोषीय बिल पर

गुणांकों के आकलन व उनकी मानक त्रुटियाँ निम्नलिखित सारणी में दी गयी हैं

	गुणांकों के आकलन	मानक त्रुटियाँ
Constant	0.003	0.009
Y	0.530	0.112
Intrate	-0.0261	0.101

(अ) ढाल गुणांकों की व्याख्या कीजिए।

(ब) 5 प्रतिशत सार्थकता स्तर पर मॉडल की संपूर्ण सार्थकता की जाँच कीजिए, यदि

इस मॉडल के लिए निर्धारण गुणांक 0.519 पाया गया है।

(ii) 120 व्यक्तियों के आँकड़ों का उपयोग करके मजदूरी निर्धारण का निम्नलिखित मॉडल

आकलित किया गया :

$$WAGE_i = B_1 + B_2IQ_i + B_3PGRAD_i + u_i$$

जहाँ

WAGE : मजदूरी प्रति घण्टा, रुपयों में

IQ : बुद्धि लब्धि Intelligent Quotient, measured 70-130 के पैमाने पर

PGRAD : डमी चर = 1 यदि व्यक्ति एक अधिस्नातक है

= 0 यदि व्यक्ति स्नातक से नीचे है।

समाश्रयण परिणाम निम्न प्रकार हैं : (मानक त्रुटियाँ कोष्ठकों में)

$$\widehat{W}_i = 224.8438 + 5.0766IQ_i + 498.0493PGRAD_i$$

$$(66.6424) \quad (0.6624) \quad (20.0768)$$

$$\bar{R}^2 = 0.4540$$

(अ) अधिस्नातक और स्नातक से नीचे वालों हेतु आकलित समाश्रयण समाकरण का

उल्लेख कीजिए।

(ब) डमी चर की सांख्यिकीय सार्थकता का 5 प्रतिशत सार्थकता स्तर पर परीक्षण

कीजिए। इस परीक्षण से आप क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं ?

(स) क्या B_3 का आकलिक मान व मानक त्रुटि परिवर्तित हो जाएँगे। इसके समाश्रयण

सार्थकता की टिप्पणी कीजिए।

5

3. (i) Consider the Cobb Douglas production function in its stochastic form :

$$Q_t = e^{\alpha} K_t^{\beta} L_t^{\gamma} e^u$$

where Q denotes output, K denotes capital input and L denotes labor input, e is the base of natural logarithm and u is the random error term.

Formulate a model that can be used to estimate the parameters α , β and γ using ordinary least squares. Show that this model implies a constant partial elasticity of output with respect to labor but a variable marginal effect of labor on output.

3

- (ii) In studying the movement in production workers' share in value added in the primary metal industry for an economy based on annual data for 1980-2000, the

following linear trend and quadratic trend models were considered :

$$\text{Model A : } Y_t = B_1 + B_2t + u_t$$

$$\text{Model B : } Y_t = A_1 + A_2t + A_3t^2 + u_t$$

where Y : Labor's share in value added

t : time

The following regression results were obtained, t ratios in parentheses :

$$\text{Model A } \hat{Y}_t = 0.4529 - 0.0041 t$$

$$t \quad (2.535) \quad (-3.9608)$$

$$R^2 = 0.5284, \text{ Durbin Watson's } d = 0.8252$$

$$\text{Model B } \hat{Y}_t = 0.4784 - 0.0127 t + 0.0005 t^2$$

$$t \quad (2.031) \quad (-3.2724) \quad (2.7777)$$

$$R^2 = 0.6629, \text{ Durbin Watson's } d = 1.82$$

- (a) Use the Durbin Watson test to check if there is autocorrelation in Model A ? In Model B ? Use $\alpha = 5\%$. What conclusions do you draw ?
- (b) The linear trend model of labor share can be viewed as a restricted version of the quadratic trend model. Perform a suitable test, at 5% level of significance, to see if the linear trend model is better than the quadratic trend model.
- (c) Based on your conclusions in part (a) and (b) above, justify the inclusion of the quadratic term t^2 as an explanatory variable in Model B.
- (d) Do you think we need to worry about multicollinearity in the quadratic trend model ?
- (i) कौन डालस उत्पादन फलन पर विचार कीजिए :

$$Q_t = e^{\alpha} K_t^{\beta} L_t^{\gamma} e^u$$

जहाँ Q उत्पाद को व्यक्त करता है ? K पूँजी को व्यक्त करता है व L श्रम को व्यक्त करता है, ε प्राकृतिक लघुगणक का आधार है तथा u यादृच्छिक त्रुटि पद है।

एक मॉडल सूचित कीजिए जिसका उपयोग करके साधारण न्यूनतम वर्ग विधि की सहायता से α , β व γ प्राचलों को आकलित किया जा सके। दर्शाइए कि इस मॉडल के अनुसार उत्पादन की श्रम के प्रति आंशिक लोच अंतर है पर श्रम का उत्पादन पर सीमांत प्रभाव चर है।

3

- (ii) एक अर्थव्यवस्था में 1980-2000 के आँकड़ों के आधार पर प्राथमिक धातु उद्योग में मूल्य वृद्धि में श्रमिकों के योगदान के अध्ययन में निम्नलिखित रेखिक प्रवृत्ति व द्विघात प्रवृत्ति मॉडलों पर विचार किया गया :

$$\text{Model A : } Y_t = B_1 + B_2t + u_t$$

$$\text{Model B : } Y_t = A_1 + A_2t + A_3t^2 + u_t$$

जहाँ Y : मूल्य वृद्धि में श्रम का योगदान

t : समय

निम्नलिखित समाश्रयण परिणाम प्राप्त हुए, जहाँ अनुपात कोष्ठकों में हैं :

मॉडल A : $\hat{Y}_t = 0.4529 - 0.0041 t$

t (2.535) (-3.9608)

$R^2 = 0.5284$, Durbin Watson's $d = 0.8252$

मॉडल B : $\hat{Y}_t = 0.4784 - 0.0127 t + 0.0005 t^2$

(2.031) (-3.2724) (2.7777)

$R^2 = 0.6629$, Durbin Watson's $d = 1.82$

(अ) डरबिन-वॉटसन परीक्षण की सहायता से जाँच कीजिए कि क्या मॉडल 1 व मॉडल

2 में स्वसहसंबंध है ? $\alpha = 5\%$ का उपयोग कीजिए। आप क्या निष्कर्ष

निकालते हैं ?

- (ब) श्रम के योगदान का रैखिक मॉडल अप्रतिबंधित द्विघात मॉडल के प्रतिबंधित रूप के तौर पर देखा जा सकता है। 5 प्रतिशत सार्थकता स्तर पर यथायोग्य परीक्षण कीजिए यह देखने के लिए कि क्या प्रतिबंधित रैखिक मॉडल अप्रतिबंधित द्विघात प्रवृत्ति समाश्रयण मॉडल से बेहतर है।
- (स) भागों (अ) व (ब) में अपने निष्कर्षों के आधार पर द्विघात पद t^2 को मॉडल B में व्याख्यात्मक चर के तौर पर सम्मिलित किए जाने को न्यायसंगत ठहराएं।
- (द) क्या आपको लगता है कि हमें द्विघात प्रवृत्ति मॉडल में बहुसरेखता के बारे में चिंता करनी चाहिए ?

7

Or

(अथवा)

- (i) Using cross-sectional data for 130 households, the following model was estimated :

$$FE_i = B_1 + B_2 \ln TE_i + u_i$$

Where : FE : Expenditure on food, measured in rupees

TE : Total expenditure, measured in rupees

The table below has estimates of the coefficients and their standard errors :

	Coefficient	Standard Error
Constant	0.9303	0.0363
ln TE	-0.0777	0.0035

$$R^2 = 0.3508, \bar{R}^2 = 0.3501 \quad F = 468.645$$

- (a) Which economic phenomena is being studied using this model ?
- (b) Interpret the slope coefficient in this model.
- (c) Derive an expression for the elasticity of expenditure on food with respect to total expenditure.
- (d) If the relationship between FE and TE is respecified as a reciprocal model, then how would the interpretation of the intercept term differ in the models ?

- (ii) Explain step by step, how you would use the Breusch Godfrey Lagrange Multiplier test for detecting autocorrelation in a regression model ? In what ways is it better than the Durbin-Watson test ?

4

- (i) 130 परिवारों के अनुप्रस्थ काट आँकड़ों का उपयोग करके निम्नलिखित मॉडल आकलित किया गया :

$$FE_i = B_1 + B_2 \ln TE_i + u_i$$

जहाँ : FE : भोजन पर व्यय, रुपयों में

TE : कुल व्यय, रुपयों में

गुणांकों के आकलन व उनकी मानक त्रुटियाँ निम्नलिखित सारणी में दिए गए हैं :

	गुणांक	मानक त्रुटि
टचर	0.9303	0.0363
ln TE	-0.0777	0.0035

$$R^2 = 0.3508, \bar{R}^2 = 0.3501 \quad F = 468.645$$

- (अ) इस मॉडल में किस आर्थिक अनुप्रयोग का अध्ययन किया जा रहा है ?
- (ब) इस मॉडल में ढाल गुणांक की व्याख्या कीजिए।
- (स) भोजन पर व्यय की कुल व्यय के प्रति लोच हेतु एक व्यंजक उत्पन्न कीजिए।
- (द) यदि FE व TE के मध्य संबंध प्रतिलोम मॉडल (Reciprocal Model) के रूप में व्यक्त किया जाए तो अंतःखंड पद की व्याख्या कीजिए। 6

- (ii) चरणवार समझाइए कि आप एक समाश्रयण मॉडल में स्वसहसंबंध का पता लगाने हेतु ब्रूश गौडफ्री लैग्रांज गुणक परीक्षण का किस प्रकार उपयोग करेंगे ? यह डरबिन-वॉटसन परीक्षण से किस प्रकार बेहतर है ? 4

4. (i) A researcher wanted to study the relationship between the demand for a commodity Q, its price P, and disposable income of the consumer, Y. The following model was proposed :

$$Q_i = B_1 + B_2 P_i + B_3 Y_i + u_i$$

Based on 30 observations, the following regression result was obtained (figures in parentheses are the standard errors).

Model 1 :

$$\hat{Q}_i = 92.05 - 0.142 P_i + 0.236 Y_i$$

se (5.84) (0.067) (0.031)

However, if income, a relevant and important variable, is omitted from the above model, then the following regression result was obtained (Figures in parentheses are the standard errors).

Model 2

$$\hat{Q}_i = 89.97 + 0.107P_i$$

se (11.87) (0.118)

- (a) In the context of a specification error committed in Model 2, explain the concept of omitted variable bias. In what way is the change in sign of the price coefficient in the misspecified model attributable to the omitted variable bias ?

(b) From the given regression results, obtain an estimate of slope coefficient in the regression of omitted variable, Y on the included variable P. 5

(ii) Based on data on research and development expenditure (R&D) and sales for 18 industry groups in the United States, all measured in millions of dollars, the following regression results were reported, (standard errors in parentheses),

$$\widehat{R\&D}_i = 192.9931 + 0.0319Sales_i$$

$$se \quad (533.9317) \quad (0.0083)$$

Since the cross-sectional data included heterogeneous units, heteroscedasticity was likely to be present. White's test was performed using ordinary least squares residuals, e_i , of the above regression and the following results were obtained :

$$\widehat{e_i^2} = -6219665 + 229.3508Sales_i - 0.000537Sales_i^2$$

$$R^2 = 0.5891$$

(a) Use the R^2 value reported in the auxiliary regression to test if the model indeed suffers from heteroscedasticity. Perform the test, at 5% level of significance, and state the null and alternate hypotheses clearly.

(b) In the light of your answer in part (a) what can you say about the R&D regression results reported above ?

5

(i) एक शोधकर्ता 30 प्रेक्षणों के आधार पर एक वस्तु की माँग Q के इसकी कीमत P व Y प्रयोज्य आय के साथ संबंध का अध्ययन करना चाहता है।

निम्नलिखित समाश्रयण परिणाम प्राप्त हुए : (मानक त्रुटियाँ कोष्ठकों में हैं)

मॉडल 1 :

$$\hat{Q}_i = 92.05 - 0.142 P_i + 0.236 Y_i$$

$$\text{se} \quad (5.84) \quad (0.067) \quad (0.031)$$

परंतु यदि आय, जो कि एक प्रासंगिक व महत्वपूर्ण चर है, को उपर्युक्त मॉडल से हटा दिया जाए तो निम्नलिखित समाश्रयण परिणाम प्राप्त होते हैं :

मॉडल 2 :

$$\hat{Q}_i = 89.97 + 0.107P_i$$

$$\text{se} \quad (11.85) \quad (0.118)$$

(अ) उपर्युक्त मॉडल 2 में की गई विवरणात्मक त्रुटि (specification error) के परिप्रेक्ष्य में छोड़े गए चर से संबंधित अभिनतता (omitted variable bias) की अवधारणा को समझाइए। कीमत के गुणांक के चिह्न में परिवर्तन किस प्रकार से छोड़े गए चर से संबंधित अभिनतता का परिणाम है ?

(ब) दिए गए समाश्रयण परिणामों से छोड़े गए Y चर के सम्मिलित चर P पर समाश्रयण में ढाल गुणांक का एक आकलन प्राप्त कीजिए। 5

(ii) संयुक्त राज्य अमेरिका में 18 उद्योग समूहों हेतु शोध व विकास व्यय के आँकड़ों (सभी दस लाख डॉलर में) के आधार पर निम्नलिखित समाश्रयण परिणाम प्राप्त हुए (कोष्ठकों में मानक त्रुटियाँ हैं)

$$\widehat{R\&D}_i = 192.9931 + 0.0319\text{Sales}_i$$

$$\text{se} \quad (533.9317) \quad (0.0083)$$

चूँकि अनुप्रस्थ काट आँकड़े (cross-sectional data) विज्ञानीय इकाइयों पर आधारित थे, प्रसरण विषमता (heteroscedasticity) के विद्यमान होने की संभावना है। उपर्युक्त समाश्रयण के साधारण न्यूनतम वर्ग अवशिष्टों की सहायता से व्हाइट का परीक्षण किया गया व निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हुए :

$$\widehat{e}_i^2 = -6219665 + 229.3508\text{Sales}_i - 0.000537\text{Sales}_i^2$$

$$R^2 = 0.5891$$

(अ) इन परिणामों में दिए गए R^2 का उपयोग करके परीक्षण कीजिए कि क्या यह मॉडल वास्तव में प्रसरण विषमता से ग्रस्त हैं। 5 प्रतिशत सार्थकता स्तर पर परीक्षण कीजिए तथा निराकरणीय व वैकल्पिक प्राक्कल्पनाओं का स्पष्टतः उल्लेख कीजिए।

(ब) भाग 'अ' में अपने उत्तर के आधार पर शोध व विकास व्यय समाश्रयण के उपर्युक्त परिणामों के बारे में आप क्या कह सकते हैं ?

Or

(अथवा)

- (i) A researcher postulated that the population density, Y in a district depends on its distance, X , from a central business district. The following regression results were obtained from a sample of 39 districts. (Figures in parentheses are t ratios).

Model 1 :

$$\ln \widehat{Y}_i = 10.093 - 0.239X_i$$

$$t = (54.7) \quad (-12.28)$$

Model 2 :

$$\frac{\ln \widehat{Y}_i}{\sqrt{X_i}} = 9.932 \frac{1}{\sqrt{X_i}} - 0.2258 \sqrt{X_i}$$

$$t = (47.87) \quad (-15.10)$$

Y = Population density (measured as thousands of people living per square kilometer of the district)

X = Distance in kilometers from central business district.

- (a) Why do you think Model 1 was transformed into Model 2 and reestimated? What implicit assumption underlines this transformation?

- (b) How can you get back to Model 1 (the untransformed model) from the results of Model 2 ? Write down this estimated equation and interpret its intercept and slope coefficients. 5
- (ii) "Adding an irrelevant variable (one that has a truly zero coefficient) to a model has the same effect as high multicollinearity when it comes to properties of the ordinary least squares estimators of parameters. While the irrelevant variable can be dropped, the same cannot be stated for highly collinear variables." Comment on the above statement. 5
- (i) एक शोधकर्ता का दावा है कि जनसंख्या घनत्व (Y) केंद्रीय व्यावसायिक जिले से दूरी (X) पर निर्भर करता है। अध्ययन में 39 जिलों के प्रतिदर्श से निम्नलिखित समाश्रयण परिणाम प्राप्त हुए (कोष्ठकों में t मान दिए गए हैं)

मॉडल 1 :

$$\ln \widehat{Y}_i = 10.093 - 0.239X_i$$

$$t = (54.7) \quad (-12.28)$$

मॉडल 2 :

$$\frac{\ln \widehat{Y}_i}{\sqrt{X_i}} = 9.932 \frac{1}{\sqrt{X_i}} - 0.2258 \sqrt{X_i}$$

$$t = (47.87) \quad (-15.10)$$

Y = जनसंख्या घनत्व (हजार व्यक्ति प्रति वर्ग किलोमीटर में)

X = केंद्रीय व्यावसायिक जिले से दूरी किलोमीटर में

(अ) आपको ऐसा क्यों लगता है कि मॉडल 1 को मॉडल 2 में रूपांतरित करके

पुनराकलित किया गया है ? इस रूपांतरण के पीछे क्या परोक्ष मान्यता है ?

(ब) मॉडल 2 के परिणामों से आप मूल अरूपांतरित मॉडल किस प्रकार प्राप्त कर

सकते हैं ? आकलित समीकरण का उल्लेख कीजिए तथा अंतःखण्ड व ढाल

गुणांकों की व्याख्या कीजिए।

5

(ii) यदि प्राचलों के साधारण न्यूनतम वर्ग आकलकों के गुण-धर्मों को देखा जाए तो

एक मॉडल में एक अप्रासंगिक चर (वह चर जिसका वास्तविक गुणांक शून्य हो)

जोड़ने का वही प्रभाव होता है जो कि उच्च बहुसंख्यता का होता है। यद्यपि अप्रासंगिक

चर को छोड़ा जा सकता है, यह बात उच्चतर संरेख चरों हेतु नहीं कही जा सकती

है। टिप्पणी कीजिए।

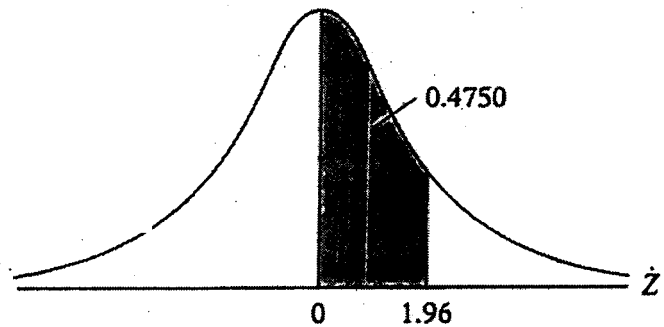
5

AREAS UNDER THE STANDARDIZED NORMAL DISTRIBUTION

Example

$$\Pr(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.4750$$

$$\Pr(Z \geq 1.96) = 0.5 - 0.4750 = 0.025$$



Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

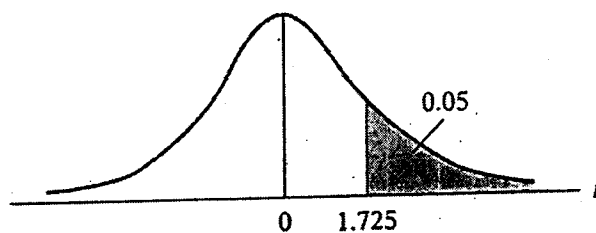
PERCENTAGE POINTS OF THE t DISTRIBUTION

Example

$$\Pr(t > 2.086) = 0.025$$

$$\Pr(t > 1.725) = 0.05 \quad \text{for } df = 20$$

$$\Pr(|t| > 1.725) = 0.10$$



df \ Pr	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
	0.50	0.20	0.10	0.05	0.02	0.010	0.002
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

UPPER PERCENTAGE POINTS OF THE F DISTRIBUTION

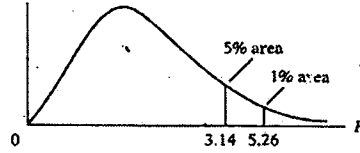
Example

$\Pr(F > 1.59) = 0.25$

$\Pr(F > 2.42) = 0.10$ for $df_{N_1} = 10$

$\Pr(F > 3.14) = 0.05$ and $N_2 = 9$

$\Pr(F > 5.26) = 0.01$



df for denominator N_2	df for numerator N_1												df for numerator N_1												Pr	
	Pr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500		∞
1	.25	5.83	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.26	9.32	9.36	9.41	9.49	9.58	9.63	9.67	9.71	9.74	9.76	9.78	9.80	9.82	9.84	9.85	.25
	.10	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9	60.2	60.5	60.7	61.2	61.7	62.0	62.3	62.5	62.7	62.8	63.0	63.1	63.2	63.3	63.3	.10
	.05	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	246	248	249	250	251	252	252	253	253	254	254	254	.05
2	.25	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.37	3.38	3.39	3.39	3.41	3.43	3.43	3.44	3.45	3.45	3.46	3.47	3.47	3.48	3.48	3.48	.25
	.10	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.40	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.47	9.48	9.48	9.49	9.49	9.49	.10
	.05	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	.25	2.02	2.28	2.38	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.44	2.45	2.45	2.46	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	.25
	.10	5.54	5.48	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.15	5.15	5.14	5.14	5.14	5.14	.10
	.05	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.78	8.78	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.58	8.57	8.55	8.55	8.54	8.54	8.53
4	.25	1.81	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	.25
	.10	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.91	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.80	3.79	3.78	3.78	3.78	3.77	3.76	.10
	.05	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.98	5.94	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.69	5.66	5.66	5.66	5.65	5.64	5.63
5	.25	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88	1.87	1.87	1.87	1.87	1.87	.25
	.10	4.08	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.28	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.15	3.14	3.13	3.12	3.12	3.11	3.10	.10
	.05	8.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.71	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.43	4.41	4.40	4.39	4.37	4.36	.05
6	.25	1.62	1.78	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.77	1.77	1.76	1.76	1.75	1.75	1.75	1.75	1.74	1.74	1.74	1.74	1.74	.25
	.10	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.92	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.77	2.76	2.75	2.74	2.73	2.73	2.72	.10
	.05	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.74	3.71	3.70	3.69	3.68	3.67	.05
7	.25	1.57	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	1.69	1.68	1.68	1.68	1.67	1.67	1.66	1.66	1.66	1.65	1.65	1.65	1.65	1.65	1.65	.25
	.10	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.68	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.52	2.51	2.50	2.49	2.48	2.48	2.47	.10
	.05	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.30	3.27	3.27	3.25	3.24	3.23	.05
8	.25	1.54	1.66	1.67	1.68	1.66	1.65	1.64	1.63	1.63	1.63	1.63	1.62	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.59	1.58	1.58	1.58	1.58	1.58	.25
	.10	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.52	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.35	2.34	2.32	2.32	2.31	2.30	2.29	.10
	.05	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.02	3.01	2.97	2.97	2.95	2.94	2.93	.05
9	.25	1.51	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.55	1.54	1.54	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	.25
	.10	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.40	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.22	2.21	2.19	2.18	2.17	2.17	2.16	.10
	.05	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.80	2.79	2.76	2.75	2.73	2.72	2.71	.05
	.01	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.52	4.48	4.42	4.40	4.36	4.33	4.31	.01

UPPER PERCENTAGE POINTS OF THE F DISTRIBUTION (Continued)

df for denominator N_2	df for numerator N_1																			df for denominator N_2							
	Pr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15	20	24	30	40	50		60	100	120	200	500	∞	Pr
22	.25	1.40	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39	1.38	1.37	1.36	1.34	1.33	1.32	1.31	1.31	1.30	1.30	1.30	1.29	1.29	1.28	.25	22
	.10	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.88	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.64	1.61	1.60	1.59	1.58	1.57	.10	
	.05	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.91	1.89	1.85	1.84	1.82	1.80	1.78	.05	
	.01	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.53	2.50	2.42	2.40	2.36	2.33	2.31	.01	
24	.25	1.39	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.38	1.37	1.36	1.35	1.33	1.32	1.31	1.31	1.30	1.29	1.29	1.28	1.28	1.27	1.27	.25	24
	.10	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.85	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.58	1.57	1.56	1.54	1.53	.10	
	.05	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.21	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.85	1.84	1.80	1.79	1.77	1.75	1.73	.05	
	.01	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.40	2.33	2.31	2.27	2.24	2.21	.01	
26	.25	1.38	1.46	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.37	1.36	1.35	1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.28	1.28	1.26	1.26	1.25	1.25	.25	26
	.10	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.84	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.59	1.58	1.55	1.54	1.53	1.51	1.50	.10	
	.05	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.82	1.80	1.76	1.75	1.73	1.71	1.69	.05	
	.01	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	3.02	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.36	2.33	2.25	2.23	2.19	2.16	2.13	.01	
28	.25	1.38	1.46	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.27	1.26	1.25	1.25	1.24	1.24	.25	28
	.10	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.81	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.57	1.56	1.53	1.52	1.50	1.49	1.48	.10	
	.05	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.77	1.73	1.71	1.69	1.67	1.65	.05	
	.01	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.96	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.30	2.26	2.19	2.17	2.13	2.09	2.06	.01	
30	.25	1.38	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.35	1.34	1.32	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26	1.26	1.25	1.24	1.24	1.23	1.23	.25	30
	.10	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.79	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.55	1.54	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	.10	
	.05	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.70	1.68	1.66	1.64	1.62	.05	
	.01	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.25	2.21	2.13	2.11	2.07	2.03	2.01	.01	
40	.25	1.36	1.44	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31	1.30	1.28	1.26	1.25	1.24	1.23	1.22	1.21	1.20	1.19	1.19	1.18	.25	40
	.10	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.73	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.48	1.47	1.43	1.42	1.41	1.39	1.38	.10	
	.05	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.64	1.59	1.58	1.55	1.53	1.51	.05	
	.01	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.06	2.02	1.94	1.92	1.87	1.83	1.80	.01	
60	.25	1.35	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.29	1.27	1.25	1.24	1.22	1.21	1.20	1.19	1.17	1.17	1.16	1.15	1.15	.25	60
	.10	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.68	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.41	1.40	1.36	1.35	1.33	1.31	1.29	.10	
	.05	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.53	1.48	1.47	1.44	1.41	1.39	.05	
	.01	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.88	1.84	1.75	1.73	1.68	1.63	1.60	.01	
120	.25	1.34	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26	1.24	1.22	1.21	1.19	1.18	1.17	1.16	1.14	1.13	1.12	1.11	1.10	.25	120
	.10	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.62	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.34	1.32	1.27	1.26	1.24	1.21	1.19	.10	
	.05	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.87	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.46	1.43	1.37	1.35	1.32	1.28	1.25	.05	
	.01	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.40	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.70	1.66	1.56	1.53	1.48	1.42	1.38	.01	
200	.25	1.33	1.39	1.38	1.36	1.34	1.32	1.31	1.29	1.28	1.27	1.26	1.25	1.23	1.21	1.20	1.18	1.16	1.14	1.12	1.11	1.10	1.09	1.08	1.08	.25	200
	.10	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66	1.63	1.60	1.57	1.52	1.46	1.42	1.38	1.34	1.31	1.28	1.24	1.22	1.20	1.17	1.14	.10	
	.05	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88	1.84	1.80	1.72	1.62	1.57	1.52	1.46	1.41	1.39	1.32	1.29	1.26	1.22	1.19	.05	
	.01	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41	2.34	2.27	2.13	1.97	1.89	1.79	1.69	1.63	1.58	1.48	1.44	1.39	1.33	1.28	.01	
∞	.25	1.32	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24	1.24	1.22	1.19	1.18	1.16	1.14	1.13	1.12	1.09	1.08	1.07	1.04	1.00	.25	∞
	.10	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.57	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.26	1.24	1.18	1.17	1.13	1.08	1.00	.10	
	.05	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.35	1.32	1.24	1.22	1.17	1.11	1.00	.05	
	.01	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.25	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.52	1.47	1.36	1.32	1.25	1.15	1.00	.01	

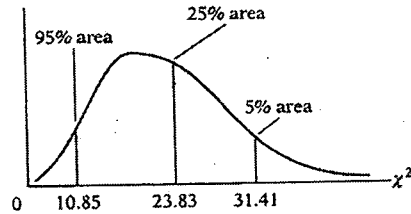
UPPER PERCENTAGE POINTS OF THE χ^2 DISTRIBUTION

Example

$Pr(\chi^2 > 10.85) = 0.95$

$Pr(\chi^2 > 23.83) = 0.25$ for $df = 20$

$Pr(\chi^2 > 31.41) = 0.05$



Degrees of freedom \ Pr	.995	.990	.975	.950	.900	.750	.500	.250	.100	.050	.025	.010	.005
1	392704×10^{-10}	157088×10^{-9}	982069×10^{-9}	393214×10^{-8}	.0157908	.1015308	.454937	1.32330	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944
2	.0100251	.0201007	.0506356	.102587	.210720	.575364	1.38629	2.77259	4.60517	5.99147	7.37776	9.21034	10.5966
3	.0717212	.114832	.215795	.351846	.584375	1.212534	2.36597	4.10835	6.25139	7.81473	9.34840	11.3449	12.8381
4	.206990	.297110	.484419	.710721	1.063623	1.92255	3.35670	5.38527	7.77944	9.48773	11.1433	13.2767	14.8602
5	.411740	.554300	.831211	1.145476	1.61031	2.67460	4.35146	6.62568	9.23635	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	.675727	.872085	1.237347	1.63539	2.20413	3.45460	5.34812	7.84080	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	.989265	1.239043	1.68987	2.16735	2.83311	4.25485	6.34581	9.03715	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	1.344419	1.646482	2.17973	2.73264	3.48954	5.07064	7.34412	10.2188	13.3616	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550
9	1.734926	2.087912	2.70039	3.32511	4.16816	5.89883	8.34283	11.3887	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893
10	2.15585	2.55821	3.24697	3.94030	4.86518	6.73720	9.34182	12.5489	15.9871	18.3070	20.4831	23.2093	25.1882
11	2.60321	3.05347	3.81575	4.57481	5.57779	7.58412	10.3410	13.7007	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7569
12	3.07382	3.57056	4.40379	5.22603	6.30380	8.43842	11.3403	14.8454	18.5494	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	3.56503	4.10691	5.00874	5.89186	7.04150	9.29906	12.3398	15.9839	19.8119	22.3621	24.7356	27.6883	29.8194
14	4.07468	4.66043	5.62872	6.57063	7.78953	10.1653	13.3393	17.1170	21.0642	23.6848	26.1190	29.1413	31.3193
15	4.60094	5.22935	6.26214	7.26094	8.54675	11.0365	14.3389	18.2451	22.3072	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013
16	5.14224	5.81221	6.90766	7.96164	9.31223	11.9122	15.3385	19.3688	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672
17	5.69724	6.40776	7.56418	8.67176	10.0852	12.7919	16.3381	20.4887	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	6.26481	7.01491	8.23075	9.39046	10.8649	13.6753	17.3379	21.6049	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564
19	6.84398	7.63273	8.90655	10.1170	11.6509	14.5620	18.3376	22.7178	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5822
20	7.43386	8.26040	9.59083	10.8508	12.4426	15.4518	19.3374	23.8277	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	8.03366	8.89720	10.28293	11.5913	13.2396	16.3444	20.3372	24.9348	29.6151	32.6705	35.4789	38.9321	41.4010
22	8.64272	9.54249	10.9823	12.3380	14.0415	17.2396	21.3370	26.0393	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7956
23	9.26042	10.19567	11.6885	13.0905	14.8479	18.1373	22.3369	27.1413	32.0069	35.1725	38.0757	41.6384	44.1813
24	9.88623	10.8564	12.4011	13.8484	15.6587	19.0372	23.3367	28.2412	33.1963	36.4151	39.3641	42.9798	45.5585
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	19.9393	24.3366	29.3389	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9278
26	11.1603	12.1981	13.8439	15.3791	17.2919	20.8434	25.3364	30.4345	35.5631	38.8852	41.9232	45.6417	48.2899
27	11.8076	12.8786	14.5733	16.1513	18.1138	21.7494	26.3363	31.5284	36.7412	40.1133	43.1944	46.9630	49.6449
28	12.4613	13.5648	15.3079	16.9279	18.9392	22.6572	27.3363	32.6205	37.9159	41.3372	44.4607	48.2782	50.9933
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7083	19.7677	23.5666	28.3362	33.7109	39.0875	42.5569	45.7222	49.5879	52.3358
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4926	20.5992	24.4776	29.3360	34.7998	40.2560	43.7729	46.9792	50.8922	53.6720
40	20.7065	22.1643	24.4331	26.5093	29.0505	33.6603	39.3354	45.6160	51.8050	55.7585	59.3417	63.6907	66.7659
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886	42.9421	49.3349	56.3336	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900
60	35.5346	37.4848	40.4817	43.1879	46.4589	52.2938	59.3347	66.9814	74.3970	79.0819	83.2976	88.3794	91.9517
70	43.2752	45.4418	48.7576	51.7393	55.3290	61.6983	69.3344	77.5766	85.5271	90.5312	95.0231	100.425	104.215
80	51.1720	53.5400	57.1532	60.3915	64.2778	71.1445	79.3343	88.1303	96.5782	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2912	80.6247	89.3342	98.6499	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	82.3581	90.1332	99.3341	109.141	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

