

This question paper contains 8+4 printed pages]

Roll No.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

S. No. of Question Paper : 7667

Unique Paper Code : 2271102

F-1

Name of the Paper : **Mathematical Methods for Economics—I [DC.1.2]**

Name of the Course : **B.A. (Hons.)**

Semester : **I**

Duration : **3 Hours**

Maximum Marks : **75**

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

(इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए ।)

Note : Answers may be written *either* in English *or* in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी : इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए ।

All questions are compulsory.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं ।

1. Answer any *two* of the following :

2×4=8

(a) Find a , b and c if $y = 0$ is tangent to $f(x) = ax^2 + bx + c$ at $x = 4$ and $f(x)$ passes through $(0, 32)$

P.T.O.

(b) Find all x that satisfy the following inequalities :

$$(i) \quad \left| \frac{3x+1}{2} \right| < 1$$

$$(ii) \quad \frac{x}{x^2+1} > \frac{x}{x^2-1}$$

(c) Show graphically the region represented by the following set :

$$S = \{(x, y) \mid xy \geq 8 \text{ and } y \geq x^2\}$$

निम्नलिखित प्रश्नों में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिये :

(अ) a , b व c के मान ज्ञात कीजिये यदि $y = 0$, $x = 4$ पर $f(x) = ax^2 + bx + c$ की स्पर्श रेखा है तथा $f(x)$, $(0, 32)$ से गुजरता है ।

(ब) x के वे सभी मान ज्ञात कीजिये जो निम्नलिखित असमिकाओं को संतुष्ट करते हैं :

$$(i) \quad \left| \frac{3x+1}{2} \right| < 1$$

$$(ii) \quad \frac{x}{x^2+1} > \frac{x}{x^2-1}$$

(स) रेखाचित्र की सहायता से निम्नलिखित समुच्चय द्वारा वर्णित क्षेत्र को दर्शाईये :

$$S = \{(x, y) \mid xy \geq 8 \text{ तथा } y \geq x^2\}$$

2. Answer any *four* of the following :

4×4=16

(a) Compute the following limits :

(i) $\lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \right)$

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$.

(b) Find the values of x (if any) at which f is not continuous and determine whether each such discontinuity is removable.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$$

(c) Find the equations of *two* lines through the origin that are tangent to the curve :

$$x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$$

(d) Find all the asymptotes of the following function :

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x + 4}{x^2}$$

(e) Examine the convergence of the following series :

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right)$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$.

निम्नलिखित प्रश्नों में से किन्हीं चार के उत्तर दीजिये :

(अ) निम्नलिखित सीमाओं की गणना कीजिए :

$$(i) \lim_{x \rightarrow 9} \left(\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \right)$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

(ब) x के वे सभी मान ज्ञात कीजिये (यदि ऐसे कोई मान हैं तो) जिन पर f संतत (Continuous) नहीं है तथा निर्धारित कीजिये कि क्या इनमें से प्रत्येक असंततता हटाए जाने योग्य है ?

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$$

(स) मूल-बिंदु से गुजरने वाली उन दो रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिये जो कि वक्र $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$ के स्पर्शी हैं; (अर्थात् इस वक्र की स्पर्श रेखाएं हैं) ।

(द) निम्नलिखित फलन की सभी अनन्तस्पर्शियाँ (asymptotes) की जाँच कीजिये :

$$f(x) = \frac{2x^3 - 3x + 4}{x^2}$$

(य) निम्नलिखित श्रेणियों की अभिसारिता (Convergence) की जाँच कीजिये :

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right)$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

3. Answer any *three* of the following :

3×5=15

(a) Prove that if a and b are strictly positive then the equation :

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3} = 0$$

has at least one solution in the interval (1, 3).

(b) Find an approximate value for $(7)^{1/3}$ by using binomial expansion for $(1+x)^m$.

(Take $n = 2$).

(c) Show that there is at least one point in the interval [2, 4] where :

$$f(x) = (x-2)(x-3)(x-4)$$

has a horizontal tangent.

(d) Do the following functions have an inverse? Give reasons for your answer :

(i) $f(x) = 8x^7 + 4x^5 + 9x^3 + 21x$

(ii) $f(x) = 10 - x^2$.

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिये :

(अ) सिद्ध कीजिये कि यदि a व b सखततः धनात्मक हैं तो समीकरण :

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3} = 0$$

का कम से कम एक हल अंतराल (1, 3) में है ।

(ब) $(1 + x)^m$ के द्विपद विस्तार की सहायता से $(7)^{1/3}$ का सन्निकट मान (Approximate Value) ज्ञात कीजिये । ($n = 2$ लीजिए ।)

(स) दर्शाइये कि अंतराल $[2, 4]$ में कम से कम एक बिंदु ऐसा है जिस पर :

$$f(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4)$$

की स्पर्शरेखा (Tangent) क्षैतिज (Horizontal) है ।

(द) क्या निम्नलिखित फलनों के प्रतिलोम फलन हैं ? अपने उत्तरे के लिए कारण दीजिये :

(i) $f(x) = 8x^7 + 4x^5 + 9x^3 + 21x$

(ii) $f(x) = 10 - x^2$.

4. Answer any two of the following :

2×5=10

(a) (i) Given that an economy's income, consumption and population growth rates are 5%, - 0.5% and 1.5% respectively, when income $Y = \text{Rs. } 10,000$ crores and consumption $C = \text{Rs. } 8,000$ crores, find the rate of growth of per capita savings, where total savings $S = Y - C$ and population $P = 10,00,000$. Per capita savings $\text{PCS} = \text{total savings } S / \text{total population } P$.

(ii) If elasticity of $f(x)$ and $g(x)$ with respect to x are denoted by E_f and E_g respectively, find the expression for elasticity of $h(x) = f(x)g(x)$, in terms of E_f and E_g .

- (b) A new electronic gadget is introduced in the market and t months later, its unit price is $p(t)$ thousand rupees, where :

$$p(t) = \left[\frac{\ln(t+1)}{t+1} \right] + 6$$

- (i) For what values of t is the price increasing ? When is it decreasing ?
- (ii) What is maximum price of the gadget ?
- (iii) When is the price decreasing most rapidly ?
- (iv) What happens to the price in the long run as t tends to ∞ ?
- (c) A wine dealer inherits a case of fine wine (with zero acquisition cost) whose value at any given time is given by :

$$V(t) = \alpha e^{\sqrt{t}}, \text{ with } \alpha > 0$$

- (i) Show that the value of the case of wine grows over time.
- (ii) Show that even though the rate of growth of the value of wine (r_v) is positive, it declines over time.
- (iii) If there are no storage costs, calculate the time t^* when wine should be sold in order to maximize profits (Profits = Value of the case of wine – Costs). Assume a continuous discount rate = 10% and $\alpha = 1,000$.
- (iv) If the current cost of storing the case of wine until t^* is Rs. 10,000, would it be worthwhile to hold the case until t^* ?

निम्नलिखित में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिये :

(अ) (i) एक अर्थव्यवस्था की आय, उपभोग तथा जनसंख्या की वृद्धि दरें क्रमशः 5%, - 0.5% तथा 1.5% हैं । प्रति व्यक्ति बचत की वृद्धि दर की गणना कीजिये जब आय $Y = 10,000$ करोड़ रु, उपभोग $C = 8,000$ करोड़ रु; कुल बचत $S = Y - C$ तथा जनसंख्या $P = 10,00,000$ हो । प्रति व्यक्ति बचत $PCS =$ कुल बचत (S)/कुल जनसंख्या (P) ।

(ii) यदि $f(x)$ व $g(x)$ की x के सापेक्ष लोच को क्रमशः E_f व E_g से निरूपित किया जाता है, तो $h(x) = f(x)g(x)$ की लोच हेतु E_f व E_g के पदों में व्यंजक ज्ञात कीजिये ।

(ब) एक नया इलेक्ट्रॉनिक उपकरण बाजार में लाया गया और t महीने बाद इसकी इकाई

कीमत $p(t)$ हजार रु. है जहाँ $p(t) = \left[\frac{\ln(t+1)}{t+1} \right] + 6$ है ।

(i) t के किन मानों के लिए कीमत वर्धमान है । यह ह्रासमान कब है ?

(ii) उपकरण की अधिकतम कीमत क्या है ?

(iii) कीमत सबसे तेजी से कब गिरती है ?

(iv) दीर्घकाल में जब t, ∞ की ओर प्रवृत्त होता है तब कीमत को क्या होता है ?

(स) शराब के एक व्यापारी को विरासत में अच्छी शराब का एक डिब्बा मिलता है (प्राप्ति की लागत शून्य है) जिसका मूल्य किसी दिये एक समय पर निम्न प्रकार है :

$$V(t) = \alpha e^{\sqrt{t}}, \text{ with } \alpha > 0$$

- (i) दर्शाइये कि शराब के डिब्बे का मूल्य समय के साथ बढ़ता है ।
- (ii) दर्शाइये कि हालांकि शराब के मूल्य की वृद्धि दर (r_v) धनात्मक है, यह समय के साथ गिरती है ।
- (iii) उस समय t^* की गणना कीजिये जब लाभ को अधिकतम करने हेतु शराब को बेचा जाना चाहिये, यदि भण्डारण लागत नहीं हो । (लाभ = शराब के डिब्बे का मूल्य - लागतें) । मान लीजिए कि संतत बट्टा दर (Continuous Discount rate) = 10% तथा $\alpha = 1,000$ है ।
- (iv) यदि t^* तक शराब के डिब्बे का भण्डारण करने की लागत अभी 10,000 रु. है तो क्या इस डिब्बे का t^* तक रखना उपयुक्त होगा ?

5. Answer any *three* of the following :

3×6=18

- (a) Find the global maximum and minimum values of $f(x) = 6x^{4/3} - 3x^{1/3}$ on the interval $[-1, 1]$ and determine where these values occur. Find also the point(s) of inflection of $f(x)$ and intervals of concavity/convexity.

- (b) Discuss the extreme values of $f(x) = Ax^\alpha - Bx$, for different values of α , where A, B and $\alpha > 0$ and $\alpha \neq 1$.
- (c) Given $f(x) = \ln(x)$ and $g(x) = x^{1/2}$, for all $x > 0$, use Jensen's inequality to show that $h(x) = f(x) + g(x)$ is concave for all $x > 0$.
- (d) (i) A firm sells $Q = 200$ units of a commodity when its per unit price P is Rs. 100. For a discount of Rs. x , its sales Q increase by $10x$ units. At what price will the firm maximize sales revenue ($=PQ$) ?
- (ii) If $f(x)$ is maximized at x^* , show without using calculus, that $-f(x)$ is minimized at x^* .

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिये :

- (अ) अन्तराल $[-1, 1]$ में $f(x) = 6x^{4/3} - 3x^{1/3}$ के सार्वत्रिक (global) उच्चिष्ठ (Maximum) व निम्निष्ठ (minimum) मानों को ज्ञात कीजिये तथा निर्धारित कीजिये कि यह मान कहाँ प्राप्त होते हैं। $f(x)$ के मोड़ बिन्दु (Points of inflection) तथा उत्तलता (convexity)/अवतलता (Concavity) के अंतराल भी ज्ञात कीजिये।
- (ब) x के विभिन्न मानों के लिए $f(x) = Ax^\alpha - Bx$ के चरम मानों (extreme values) का विवेचन कीजिए, जहाँ $A, B, \alpha > 0$ तथा $\alpha \neq 1$.
- (स) यदि x के सभी धनात्मक मानों हेतु $f(x) = \ln(x)$ तथा $g(x) = x^{1/2}$, तो जेनसन की असमिका की सहायता से दर्शाइये कि x के सभी धनात्मक मानों के लिए $h(x) = f(x) + g(x)$ अवतल (concave) है।

- (द) (i) एक फर्म एक वस्तु की प्रति इकाई कीमत $P = 100$ रुपये होने पर इसकी $Q = 200$ इकाइयाँ बेचती है। x रु. के बट्टे (discount) से इसकी बिक्री $10x$ इकाइयाँ बढ़ जाती है। फर्म अपना विक्रय राजस्व ($=PQ$) किसी कीमत पर अधिकतम करेगी ?
- (ii) यदि फलन $f(x)$, x^* पर अधिकतमीकृत होता है, तो बिना कलन (calculus) की सहायता के दर्शाइये कि फलन $-f(x)$, x^* पर न्यूनतमीकृत होता है।

6. Answer any two of the following :

2×4=8

- (a) Compute the area A bounded by the graph of $f(x) = x^3$, the x axis and the lines $x = -2$ and $x = 3$. Draw the graph.
- (b) After initiating an advertisement campaign in an urban area, a satellite dish provider estimates that the number of new subscribers (N) will grow at a rate given by $dN/dt = 154t^{2/3} + 37$ subscribers per month where t is the number of months after the advertising begins. How many new subscribers should be expected 8 months from now ?
- (c) Evaluate the following :

(i) $\frac{d}{dx} \int_1^{\ln x} (t^2 + 3) dt$

(ii) $\frac{d}{dt} \int_{-t}^t \frac{1}{\sqrt{x^4 + 1}} dx$

निम्नलिखित में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिये :

(अ) $f(x) = x^3$ के आरेख, x अक्ष तथा रेखाओं $x = -2$ व $x = 3$ द्वारा बद्ध क्षेत्र के क्षेत्रफल की गणना कीजिए । इसका आरेख भी बनाइये ।

(ब) एक शहरी क्षेत्र में एक विज्ञापन अभियान प्रारम्भ करने के बाद एक सैटेलाइट डिश प्रदाता आकलन करता है कि नए उपभोक्ताओं की संख्या (N) निम्नलिखित दर से बढ़ेगी : $dN/dt = 154t^{2/3} + 37$, उपभोक्ता प्रति माह जहाँ t , विज्ञापन प्रारंभ होने के बाद महीनों की संख्या है । अब से 8 माह बाद कितने उपभोक्ताओं की अपेक्षा की जा सकती है ?

(स) निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिये :

$$(i) \frac{d}{dx} \int_1^{\ln x} (t^2 + 3) dt$$

$$(ii) \frac{d}{dt} \int_{-t}^t \frac{1}{\sqrt{x^4 + 1}} dx$$