

This question paper contains 7 printed pages.]

Your Roll No. ....

आपका अनुक्रमांक .....

**2828**

**B.El.Ed.**

**J**

**Paper – O 2.3**

**MATHEMATICS – I**

**Time : 3 Hours**

**Maximum Marks : 70**

**समय : 3 घण्टे**

**पूर्णांक : 70**

*(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)*

(इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।)

**Note :** Answers may be written *either* in English *or* in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

**टिप्पणी :** इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए ।

Attempt any **fourteen** questions.

Each question carries **5** marks.

किन्हीं **चौदह** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

प्रत्येक प्रश्न **पाँच** अंक का है ।

1. Solve the equation :

$$4x^3 + 20x^2 - 23x + 6 = 0,$$

two of its roots being equal.

समीकरण को हल कीजिए :

$$4x^3 + 20x^2 - 23x + 6 = 0$$

इसके दो मूल बराबर हैं ।

2. Use De' Moivre's theorem to solve the equation

$$z^7 - z = 0$$

नीचे दिये गये समीकरण को हल करने के लिए डी मोवर प्रमेय का प्रयोग कीजिए :

$$z^7 - z = 0$$

3. Solve the following system of linear equations :

$$x - y + 2z = 4$$

$$3x + y + 4z = 6$$

$$x + y + z = 1$$

रैखिक समीकरणों की निम्नलिखित प्रणाली को हल कीजिए :

$$x - y + 2z = 4$$

$$3x + y + 4z = 6$$

$$x + y + z = 1$$

4. Obtain the characteristic equation of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Hence find its inverse.

दी गई मैट्रिक्स का विशिष्ट समीकरण प्राप्त कीजिए :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

इससे इसका प्रतिलोम ज्ञात कीजिए ।

5. Prove that the union of an arbitrary family of open sets is open. Also give an example of an open set which is not an open interval.

सिद्ध कीजिए कि विवृत समुच्चयों के स्वेच्छ कुल का सम्मिलन विवृत होता है । साथ ही ऐसे विवृत समुच्चय का उदाहरण दीजिए जो विवृत अंतराल नहीं है ।

6. Show that the sequence  $\langle a_n \rangle$  defined by

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

is monotonically increasing and bounded above. What can you say about the convergence of  $\langle a_n \rangle$ ? Give reasons for your answer.

प्रदर्शित कीजिए कि

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

द्वारा निश्चित अनुक्रम  $\langle a_n \rangle$  एकदिष्ट रूप में वर्धमान और परिबद्ध होता है ।  $\langle a_n \rangle$  के अभिसरण के बारे में क्या कह सकते हैं । अपने उत्तर के समर्थन में कारण दीजिए ।

7. Test for convergence of the following series :

(i) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}$$

(ii) 
$$\frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \dots$$

निम्नलिखित श्रेणियों के लिए अभिसरण की जाँच कीजिए :

(i) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}$$

(ii) 
$$\frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \dots$$

8. If  $y = \sin (m \sin^{-1} x)$ , show that

$$(1 - x^2) y_{n+2} = (2n + 1) x y_{n+1} + (n^2 - m^2) y_n$$

Also find the value of  $y_5(0)$

यदि  $y = \sin (m \sin^{-1} x)$ , प्रदर्शित कीजिए कि

$$(1 - x^2) y_{n+2} = (2n + 1) x y_{n+1} + (n^2 - m^2) y_n$$

साथ ही  $y_5(0)$  का मान ज्ञात कीजिए ।

9. If  $u = \tan^{-1} \left( \frac{x^3 + y^3}{x - y} \right)$

prove that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

यदि  $u = \tan^{-1} \left( \frac{x^3 + y^3}{x - y} \right)$

सिद्ध कीजिए कि

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

10. Let  $f$  be the function defined on  $[0, 1]$  as follows :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x & \text{if } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{if } x = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - x & \text{if } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

Show that  $x = \frac{1}{2}$  is a point of discontinuity. Find out what type of discontinuity ' $f$ ' has at  $x = \frac{1}{2}$ .

मान लीजिए कि  $[0, 1]$  पर निश्चित फलन  $f$  इस प्रकार है

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x & \text{यदि } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{यदि } x = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - x & \text{यदि } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

प्रदर्शित कीजिए कि  $x = \frac{1}{2}$  असांतत्य का बिंदु है ।  $f$  की असांतत्यता की कौन सी किस्म  $x = \frac{1}{2}$  पर है ?

11. Let ' $f$ ' be defined by setting

$$f(x) = |x - 1| + |x + 1|, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Show that  $f$  is not derivable at the points  $x = -1$  and  $x = 1$ .

मान लीजिए कि  $f$  का निश्चय इस व्यवस्थापन से होता है :

$$f(x) = |x - 1| + |x + 1|, \forall x \in \mathbb{R}$$

प्रदर्शित कीजिए कि  $f$  को बिंदु  $x = -1$  और  $x = 1$  पर व्युत्पन्न नहीं किया जा सकता ।

12. Show that there is no real number  $k$  for which the equation  $x^3 - 3x + k = 0$  has two distinct roots in  $[0, 1]$ .

प्रदर्शित कीजिए कि ऐसी कोई वास्तविक संख्या  $k$  नहीं है जिसके लिए  $x^3 - 3x + k = 0$  समीकरण के  $[0, 1]$  में दो स्पष्ट मूल होते हैं ।

13. Show that  $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x \quad \forall x > 0$ .

प्रदर्शित कीजिए कि  $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x \quad \forall x > 0$

14. Find the maximum and minimum values of the function  $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x$  in the interval  $[0, 2\pi]$

फलन  $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x$  के अंतराल  $[0, 2\pi]$  में अधिकतम और न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए ।

15. Let  $\vec{A} = 2yz \hat{i} - x^2y \hat{j} + xz^2 \hat{k}$

Find  $\text{grad}(\text{div } \vec{A})$  and  $\text{curl } \vec{A}$ .

मान लीजिए कि  $\vec{A} = 2yz \hat{i} - x^2y \hat{j} + xz^2 \hat{k}$

ज्ञात कीजिए  $\text{grad}(\text{div } \vec{A})$  और  $\text{curl } \vec{A}$

16. Trace the curve

$$y^2x = a^2(a-x), \quad a > 0.$$

वक्र का अनुरेख कीजिए :

$$y^2x = a^2(a-x), \quad a > 0.$$

17. Prove that the two circles which pass through  $(0, a)$  and  $(0, -a)$  and touch the line  $y = mx + c$  will cut orthogonally if  $c^2 = a^2(2 + m^2)$

**OR**

Find the locus of the point of intersection of two normals to the parabola  $y^2 = 4ax$ , which are at right angles to each other.

सिद्ध कीजिए कि  $(0, a)$  और  $(0, -a)$  से गुजरने वाले और रेखा  $y = mx + c$  को स्पर्श करने वाले दो वृत्त लंबकोणीय रूप में काटेंगे यदि  $c^2 = a^2(2 + m^2)$

**अथवा**

पैराबोला  $y^2 = 4ax$  के दो अभिलंबों के प्रतिच्छेद बिंदु का रेखापथ ज्ञात कीजिए जो एक दूसरे के प्रति समकोणों पर हैं।

18. Obtain the equation of the sphere having the circle

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 6z + 10 = 0 ; x + y + z = 5$$

as the great circle. Find its centre.

**OR**

Find the equation of the right circular cylinder of radius 2 whose axis is the line

$$\frac{x-1}{2} = y-2 = \frac{z-3}{2}$$

एक गोलक का समीकरण प्राप्त कीजिए जिसका वृत्त

$x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 6z + 10 = 0 ; x + y + z = 5$  बड़े वृत्त के रूप में हो। इसके केंद्र को ज्ञात कीजिए।

**अथवा**

त्रिज्या 2 वाले एक लंबवृत्तीय सिलिंडर का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी अक्ष यह रेखा है :

$$\frac{x-1}{2} = y-2 = \frac{z-3}{2}$$