This question paper contains **16** printed pages]

Roll No. | | | | | | | | | | | |

S. No. of Question Paper : **7671**

Unique Paper Code : **2271202** **F-2**

Name of the Paper : **Mathematical Methods for Economics—II [DC-1.4]**

Name of the Course : **Bachelor with Honours in Economics**

Semester : **II**

Duration : **3 Hours** Maximum Marks : **75**

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

(इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए ।)

Note : Answers may be written *either* in English *or* in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी : इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेज़ी **या** हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए ।

There are *six* questions in all. *All* questions are compulsory.

A simple calculator can be used.

कुल **छः** प्रश्न हैं । **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं ।

साधारण कैलक्यूलेटर का उपयोग किया जा सकता है ।

P.T.O.

1. Answer any *four* of the following : 4×3

(*a*) For any square matrix P, prove that $\frac{1}{2}(P + P')$ is symmetric and that $\frac{1}{2}(P - P')$ is skew-symmetric, where P' is the transpose of P. Hence, verify that P can be written as a sum of a symmetric matrix and a skew-symmetric matrix. (Note : A square matrix P is called skew-symmetric if $P' = -P$.)

(*b*) Find the equation of the line that passes through the points P = (1, 2, 3) and Q = (2, 4, 1). How would you denote the line segment that joins P and Q ?

(*c*) Find the equation of the line at the intersection of two planes given by $x + y + z = 1$ and $x - 2y + 3z = 1$.

(*d*) Prove that if a vector **a** is orthogonal to vectors $\mathbf{x}_1$ and $\mathbf{x}_2$, then it is orthogonal to the plane spanned by $\mathbf{x}_1$ and $\mathbf{x}_2$.

(*e*) Are the following vectors linearly independent ?

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

If not, find the pattern of dependence between them.

निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** के उत्तर दीजिये :

(क) किसी वर्गाकार आव्यूह (square matrix) P के लिये सिद्ध कीजिये कि $\frac{1}{2}(P + P')$ सममित (symmetric) होता है तथा $\frac{1}{2}(P - P')$ तिर्यक-सममित (skew-symmetric) होता है जहाँ P′, P का परिवर्ती (transpose) है । इस प्रकार सत्यापित कीजिये कि P को एक सममित तथा एक तिर्यक-सममित आव्यूह के योगफल के रूप में लिखा जा सकता है । (नोट : एक वर्गाकार आव्यूह P को तिर्यक-सममित कहा जाता है यदि $P' = -P$.)

(ख) बिन्दुओं P = (1, 2, 3) तथा Q = (2, 4, 1) से गुज़रने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये । बिन्दुओं P व Q को जोड़ने वाले रेखाखण्ड को आप किस प्रकार निरूपित करेंगे ?

(ग) समतलों $x + y + z = 1$ व $x - 2y + 3z = 1$ के प्रतिच्छेदन पर स्थित रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये ।

(घ) सिद्ध कीजिये कि यदि एक सदिश **a** सदिशों $\mathbf{x}_1$ व $\mathbf{x}_2$ के लम्बवत् है तो वह $\mathbf{x}_1$ तथा $\mathbf{x}_2$ द्वारा निर्मित समतल के लम्बवत् (orthogonal) है ।

(ङ) क्या निम्नलिखित सदिश रैखिकत: स्वतन्त्र (linearly independent) हैं ?

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

यदि नहीं तो उनके मध्य निर्भरता का स्वरूप (pattern of dependence) ज्ञात कीजिये ।

2. Answer any *three* of the following : 3×4

(*a*) Show that the plane given by $-x + 2z = 10$ and the line given by $x = 5$, $y = 2 - t$ and $z = 10 + 4t$ are neither orthogonal nor parallel.

(*b*) Suppose **a** and **b** are two non-zero n-vectors. Prove the triangle inequality :

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

When is the above inequality satisfied as an exact equality ?

(*c*) An economy has two industries A and B with the following input requirements :

Industry A requires 0.10 units of its own output and 0.60 units of industry B's output in order to produce 1 unit of output in A.

Similarly, industry B requires 0.50 units of industry A's output but none of its own output to produce 1 unit of output in B.

Suppose the final demands in industries A and B are given by 1000 units and 2000 units, respectively.

(*i*) Write down the Leontief system for this economy.

(*ii*) Find the output that must be produced in each industry in order to meet the final demands.

(*d*) For what value(s) of k does the following system of equations

$$x + y - z = 1$$

$$2x + 3y + kz = 3$$

$$x + ky + 3z = 2$$

have :

(*i*) No solution

(*ii*) A unique solution

(*iii*) Infinite number of solutions.

निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** के उत्तर दीजिये :

(क) दर्शाइये कि समतल $-x + 2z = 10$ तथा रेखा $x = 5$, $y = 2 - t$ व $z = 10 + 4t$ न तो लम्बवत् (orthogonal) हैं न ही समानान्तर (parallel) हैं ।

(ख) मान लीजिये **a** व **b** दो अशून्य n-सदिश हैं । निम्नलिखित त्रिभुज असमिका को सिद्ध कीजिये :

$$\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|.$$

यह असमिका यथार्थ समिका (exact equality) के रूप में कब सन्तुष्ट होती है ?

(ग) एक अर्थव्यवस्था में दो उद्योग A तथा B हैं जिनकी आगत आवश्यकताएँ निम्न प्रकार हैं :

उद्योग A को A के उत्पाद की 1 इकाई बनाने के लिये अपने स्वयं उत्पाद की 0.10 इकाइयों व उद्योग B के उत्पाद की 0.60 इकाइयों की आवश्यकता होती है ।

इसी प्रकार उद्योग B को B के उत्पाद की 1 इकाई का निर्माण करने के लिये उद्योग A के उत्पाद की 0.50 इकाइयों की आवश्यकता होती है पर अपने स्वयं के उत्पाद की कोई आवश्यकता नहीं होती है ।

मान लीजिये उद्योगों A व B में अन्तिम मांगें क्रमशः 1000 इकाइयाँ तथा 2000 इकाइयाँ हैं ।

(*i*) इस अर्थव्यवस्था के लिये लियोण्टीफ तन्त्र (Leontief system) को लिखिये ।

(*ii*) प्रत्येक उद्योग के उत्पाद की वे मात्राएँ लिखिये जो अन्तिम माँगों को पूरा करने के लिये बनाई जानी आवश्यक हैं ।

(घ) 'k' के किन मानों के लिये निम्नलिखित समीकरण निकाय

$$x + y - z = 1$$

$$2x + 3y + kz = 3$$

$$x + ky + 3z = 2$$

का :

(*i*) कोई हल नहीं होता

(*ii*) अद्वितीय (unique) हल होता है

(*iii*) अनन्त हल होते हैं ।

3. Answer any *three* of the following : 3×4

(*a*) Find the domains of the following functions :

(*i*) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x - y}} + \sqrt{y}$,

(*ii*) $f(x, y) = \ln\left(1 - x^2 - y^2\right)$

Hence, sketch the domains in the xy-plane.

(*b*) Sketch the level curves for the following functions (corresponding to the heights as specified by k) :

(*i*) $f(x, y) = (xy + 1)^2$, $(x, y > 0)$, at height $k = 4$.

(*ii*) $g(x, y) = y^2 - x^2$, at height $k = 0$.

(*c*) Examine the definiteness of the following quadratic forms :

(*i*) $q(x, y) = -2x^2 + 6xy - 5y^2$

(*ii*) $q(u, v) = 4u^2 + 4uv + 3v^2$ subject to $u - 2v = 0$.

(*d*) Consider the function $f(x, y) = 4x^2y - xy^3 + x$:

(*i*) Find the directional derivative of f at the point (2, 3) in the direction (1, 2).

(*ii*) In what direction should one move from the point (2, 3) to increase the value of the function most rapidly ? Present your answer as a vector of length l.

निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** के उत्तर दीजिये :

(क) निम्नलिखित फलनों के परास (domain) ज्ञात कीजिये :

(*i*) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x - y}} + \sqrt{y}$,

(*ii*) $f(x, y) = \ln\left(1 - x^2 - y^2\right)$

इससे xy-समतल में इन परासों के रेखाचित्र बनाइये ।

(ख) निम्नलिखित फलनों के स्तर वक्र बनाइये (k द्वारा दी गई ऊँचाइयों के संगत) :

(*i*) $f(x, y) = (xy + 1)^2$, $(x, y > 0)$, ऊँचाई $k = 4$ पर ।

(*ii*) $g(x, y) = y^2 - x^2$, ऊँचाई $k = 0$ पर ।

(ग) निम्नलिखित द्विघात पदों की निश्चितता (definiteness) का परीक्षण कीजिये :

(*i*) $q(x, y) = -2x^2 + 6xy - 5y^2$

(*ii*) $q(u, v) = 4u^2 + 4uv + 3v^2$ यदि $u - 2v = 0$.

(घ) फलन $f(x, y) = 4x^2y - xy^3 + x$ पर विचार कीजिये :

(*i*) f का बिन्दु (2, 3) पर दिशा (1, 2) में दिशात्मक अवकलज ज्ञात कीजिये ।

(*ii*) बिन्दु (2, 3) से फलन के मान को सर्वाधिक तेज़ी से बढ़ाने के लिये किस दिशा में चलना चाहिये ? अपने उत्तर को लम्बाई l के सदिश के रूप में प्रस्तुत कीजिये ।

4. Answer any *three* of the following : 3×4

(*a*) The demand for good A is given by :

$$q_A = kp_A^{\alpha} p_B^{\beta}, \quad (k, p_A, p_B > 0)$$

where α and β are constants, and p_A and p_B represent the prices of good A and a related good B, respectively :

(*i*) Calculate the elasticities of demand for good A with respect to p_A, and with respect to p_B.

(*ii*) What are the expected signs of α and β (assume that goods A and B are substitutes) ?

(*b*) Suppose the function $f(x_1, x_2)$ is homogeneous of degree 1 and $x_1 > 0$, $x_2 > 0$:

(*i*) Show that :

$$x_1 \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + x_2 \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} = 0.$$

(*ii*) If $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} < 0$, what can you say about the sign of $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1}$? Interpret your result.

(*c*) Are the following functions homothetic ?

(*i*) $f(x, y) = e^{x^2 y} e^{xy^2}$

(*ii*) $g(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{xy}, \quad x, y \neq 0.$

Give reasons for your answer.

(*d*) Consider the following system of equations :

$$x + y_1 - 2y_2 = 0$$

$$x^2 y_1 - y_2 = 0.$$

Solve for $\frac{dy_1}{dx}$ and $\frac{dy_2}{dx}$.

निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** के उत्तर दीजिये :

(क) वस्तु A की माँग निम्न प्रकार है :

$$q_A = kp_A^{\alpha} p_B^{\beta}, \quad (k, p_A, p_B > 0)$$

जहाँ α व β स्थिरांक हैं, तथा p_A व p_B क्रमशः वस्तु A व एक सम्बन्धित वस्तु B की कीमतें हैं :

(*i*) वस्तु A की मांग की p_A के सापेक्ष व p_B के सापेक्ष लोचों की गणना कीजिये ।

(*ii*) α व β के प्रत्याशित चिन्ह क्या हैं (मान लीजिये कि वस्तुएँ A व B स्थानापन्न (substitutes) हैं ।) ?

(ख) मान लीजिये कि फलन $f(x_1, x_2)$ कोटि 1 का समघात फलन है तथा $x_1 > 0$, $x_2 > 0$:

(*i*) दर्शाइये कि :

$$x_1 \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + x_2 \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1} = 0.$$

(*ii*) यदि $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} < 0$, तो आप $\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2 \partial x_1}$ के चिन्ह के बारे में क्या कह सकते हैं ? अपने उत्तर की व्याख्या कीजिये ।

(ग) क्या निम्नलिखित फलन होमोथैटिक (homothetic) हैं ?

(*i*) $f(x, y) = e^{x^2 y} e^{xy^2}$

(*ii*) $g(x, y) = \dfrac{x^4 + y^4}{xy}$, $x, y \neq 0$.

अपने उत्तर के लिये कारण दीजिये ।

(घ) निम्नलिखित समीकरण निकाय पर विचार कीजिये :

$$x + y_1 - 2y_2 = 0$$

$$x^2 y_1 - y_2 = 0.$$

इसे $\dfrac{dy_1}{dx}$ तथा $\dfrac{dy_2}{dx}$ के लिये हल कीजिये ।

5. Answer any *three* of the following : 3×5

(*a*) Locate all extreme points and/or saddle points of the function :

$$f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^4 - 2.$$

Show that f does not have a global maximum.

(*b*) Consider the function $f(x) = \dfrac{10}{x}$, $1 \leq x \leq 10$:

(*i*) The upper level set for f is defined as $P_a = \{x : f(x) \geq a\}$, where a is any real number. Draw a graph of the function and mark its upper level set for $a = 2$.

(*ii*) Is f quasi-concave ? Explain your answer.

(*c*) For what values of the constant '*a*' is the following function :

(*i*) concave,

(*ii*) convex, and

(*iii*) neither concave nor convex :

$$f(x, y) = ax(1 - x) + 2xy - y(y + 4).$$

(*d*) Determine whether the following sets :

(*i*) $S = \{(x, y) : y \leq 9 - x^2\}$ and

(*ii*) $T = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$

are

(*i*) closed

(*ii*) bounded

(*iii*) compact.

Justify your answers.

निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** के उत्तर दीजिये :

(क) निम्नलिखित फलन के सभी चरम (extreme) व/या उदासीन (saddle) बिन्दु ज्ञात कीजिये :

$$f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^4 - 2.$$

दर्शाइये कि f का कोई वैश्विक उच्चिष्ठ (global maximum) नहीं है ।

(ख) फलन $f(x) = \frac{10}{x}$, $1 \leq x \leq 10$ पर विचार कीजिये :

(*i*) f का उच्चतर स्तर समुच्चय (upper level set) $P_a = \{x : f(x) \geq a\}$ के रूप में परिभाषित है, जहाँ a कोई वास्तविक संख्या है । इस फलन का आरेख बनाइये तथा $a = 2$ के लिये इसका उच्चतर समुच्चय चिन्हित कीजिये ।

(*ii*) क्या f अर्द्ध-अवतल है (quasi-concave) ? अपने उत्तर को समझाइये ।

(ग) स्थिरांक 'a' के किन मानों के लिये निम्नलिखित फलन :

(*i*) अवतल (concave) है

(*ii*) उत्तल (convex) है तथा

(*iii*) न तो अवतल है न ही उत्तल :

$$f(x, y) = ax(1 - x) + 2xy - y(y + 4).$$

(घ) निर्धारित कीजिये कि क्या निम्नलिखित समुच्चय :

(*i*) $S = \{(x, y) : y \leq 9 - x^2\}$ तथा

(*ii*) $T = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$

(*i*) बन्द (closed) हैं

(*ii*) बद्ध (bounded) हैं

(*iii*) सघन (compact) हैं ।

अपने उत्तरों के लिये उचित कारण दीजिये ।

6. Answer any *two* of the following : 2×6

(*a*) A firm uses inputs L and K to produce a target level of output Q = LK. The prices per unit of L and K are w and r, respectively. Using the Lagrangean method, solve the following minimization problem :

$$\underset{L, K}{\text{Min}} \; C(L, K) = wL + rK$$

subject to

$$Q = LK$$

(*i*) Find the cost minimizing inputs L^* and K^*.

(*ii*) Find the optimal value function C^* as a function of w, r and Q.

(*iii*) Apply the envelope theorem to find the derivative of the optimal value function $C^*(w, r, Q)$ with respect to Q.

(*b*) Solve, using the Lagrangean method, the following problem :

$$\underset{x, y}{\text{Min}} \; f(x, y) = x + y$$

subject to

$$x^2 - y = 1.$$

Also explain the problem geometrically by drawing appropriate level curves for f together with the graph of the parabola $x^2 - y = 1$. Does the associated maximization problem have a solution ? Justify your answer.

(*c*) Consider the function :

$$f(x, y) = -\frac{1}{3}x^3 + x - y^2$$

defined over the set :

$$S = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}.$$

Find the maximum value of the function f over the set defined by S.

निम्नलिखित में से किन्हीं **दो** के उत्तर दीजिये :

(क) एक फर्म अपने उत्पाद Q = LK के लक्ष्य स्तर का उत्पादन करने के लिये दो आगतों L व K का उपयोग करती है । L व K की प्रति इकाई कीमतें क्रमशः w व r हैं । लैग्रांजे की विधि से निम्नलिखित न्यूनतमीकरण समस्या को हल कीजिये :

$$\underset{L, K}{\text{Min}} \; C(L, K) = wL + rK$$

यदि

$$Q = LK$$

(*i*) आगतों की लागत न्यूनतम करने वाली मात्राएँ L^* व K^* ज्ञात कीजिये ।

(*ii*) इष्टतम (optimal) मान फलन C^* को w, r व Q के फलन के रूप में ज्ञात कीजिये ।

(*iii*) आवरण प्रमेय (envelope theorem) के प्रयोग से इष्टतम मान फलन $C^*(w, r, Q)$ का Q के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिये ।

(ख) लैग्रांजे की विधि की सहायता से निम्नलिखित समस्या को हल कीजिये :

$$\underset{x, y}{\text{Min}} \; f(x, y) = x + y$$

यदि

$$x^2 - y = 1.$$

f के लिये उपयुक्त स्तर वक्र व परवलय (parabola) $x^2 - y = 1$ का आरेख बनाकर इस समस्या को ज्यामितीय रूप से भी समझाइये । क्या सम्बन्धित अधिकतमीकरण समस्या का कोई हल है ? अपने उत्तर के लिये उचित कारण दीजिये ।

(ग) समुच्चय :

$$S = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$$

पर परिभाषित फलन :

$$f(x, y) = -\frac{1}{3}x^3 + x - y^2$$

पर विचार कीजिये । S द्वारा परिभाषित समुच्चय में फलन f का अधिकतम मान ज्ञात कीजिये ।